Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

K. Hensel

H. Hasse L. Schlesinger

Wissenschaftlicher Beirat

H. Brandt / M. Dehn / G. Doetsch / A. Fraenkel / O. Haupt / F. Hausdorff
E. Hellinger / G. Kowalewski / H. Rademacher / K. Reidemeister
A. Rosenthal / C. Schaefer / W. Schmeidler / F. Schottky / O. Toeplitz

Band 164

Heft 2

Ausgegeben den 30. März 1931

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

Berlin W 10 und Leipzig

1931

Band 164. Heft 2.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Jung, Heinrich, Die Erzeugung orthogonaler Koordinatensysteme in der Ebene und im Raum durch ein Koordinatenpotential	67
Nagell, Trygve, Zur Theorie der algebraischen Ringe	80
Maier, W., Bernoullische Polynome und elliptische Funktionen	85
Kaufmann, B., Über die Konvexitäts- und Konkavitätsstellen auf Jordankurven	112
Mühlendyck, O., Über ein Familie analytischer Regelflächen	128

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgend einem Grunde Text-Änderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion ausschließlich unter der Adresse:

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik

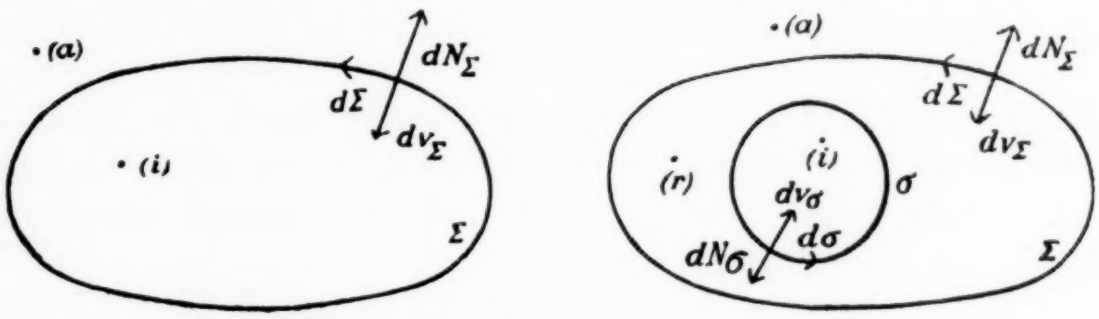
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Behringweg 7.

Die Erzeugung orthogonaler Koordinatensysteme in der Ebene und im Raum durch ein Koordinatenpotential *).

Von *Heinrich Jung* in Göttingen.

Bei gewissen Problemen der Potentialtheorie und der Theorie der Integralgleichungen, welchen ein ebenes oder räumliches Gebiet zugrundeliegt, ist es unter Umständen praktisch, wenn man sich auf ein orthogonales Koordinatensystem beziehen kann, in welchem *die Berandungsstücke des Grundgebiets einer Schar von Koordinatenlinien bzw. -flächen angehören*, die von den anderen Koordinatenlinien bzw. den beiden anderen Flächenscharen *senkrecht* durchsetzt wird. In den folgenden Ausführungen soll eine Methode angegeben werden, durch welche man ganz allgemein einfache Koordinatensysteme dieser Art erhalten kann. Ob und inwiefern sich in gewissen Spezialfällen auf andere Weise einfachere Systeme finden lassen, bleibe unerörtert.

Um Weitläufigkeiten zu vermeiden, seien nur solche einfachen Grundgebiete betrachtet (Innengebiete und Ringgebiete [1])), wie sie Fig. 1 zeigt. Die Randstücke sollen



Innengebiet Fig. 1. *Ringgebiet*

als glatt vorausgesetzt werden und keine singulären Punkte enthalten. Betreffs der in den folgenden Untersuchungen verwendeten Bezeichnungen und Symbole sei auf Fig. 1 verwiesen. Bezüglich der Randelemente $d\Sigma$ und $d\sigma$ ist zu bemerken, daß sie *im Raum* als Flächenstückchen *keinerlei Richtungsbedeutung haben*, während es sich *in der Ebene* als praktisch erweist, ihnen einen Richtungssinn beizulegen, und zwar den *positiven* Umlaufssinn des betreffenden Randes. Bei den Randnormalen bedeutet N stets die nach *außen* und ν die nach *innen gerichtete* (am Innenrand der Ringgebiete weist letztere aus dem Grundgebiet heraus!). — Der außerhalb Σ gelegene Teil der Ebene bzw. des Raumes sei als Außengebiet bezeichnet, bei Ringgebieten der innerhalb σ gelegene als Innengebiet.

*) Die Untersuchungen, deren Ergebnisse in diesem Aufsatz niedergelegt sind, wurden auf Anregung von Herrn Professor Neumann-Marburg im dortigen mathematischen Institut durchgeführt. Das gleiche gilt für den in Bd. 163, S. 89. des Crelleschen Journals abgedruckten Artikel über die 2. Greenschen Funktionen.

[1]) Im Raum ist die Bezeichnung „Schalengebiet" treffender, doch soll auch hier von einem „Ringgebiet" gesprochen werden, um die Nomenklatur nicht unnötig zu komplizieren.

A. Orthogonale Koordinatensysteme in der Ebene.

§ 1. Das Koordinatenpotential für Innengebiete.

Ist V irgendeine Potentialfunktion in der Ebene, so stehen bekanntlich die Äquipotentialkurven senkrecht auf den Kraftlinien, die mit den Gradientenkurven zusammenfallen. Man erhält also ein orthogonales Koordinatensystem von der in der Einleitung angegebenen Art, wenn man für V ein Potential wählt, das längs des Randes Σ konstant ist, die Äquipotentialkurven für die eine Schar von Koordinatenlinien ($\lambda = \text{const.}$), und die Kraftlinien für die andere Schar ($\vartheta = \text{const.}$) verwendet. Wie man die einzelnen λ- und ϑ-Werte den Koordinatenlinien zuordnet, ist zunächst gleichgültig.

Als einfachstes Koordinatenpotential V bietet sich hier zunächst im *Außengebiet* von Σ *das Potential* Π *der natürlichen Belegung* ϱ_Σ *des Randes* dar [2]). Im *Innengebiet*, wo das Potential dieser Randbelegung konstant ist, also keine eigentlichen Äquipotentialkurven existieren, ist für V die *analytische Fortsetzung* von Π zu verwenden, welche in Zukunft auch mit Π bezeichnet sein soll. (Hierbei ist vorausgesetzt, daß sich das Potential Π über das *ganze* Innengebiet, also bis an singuläre Punkte und Linienstücke heran, fortsetzen läßt. Trifft dies in speziellen Fällen nicht zu, so seien diese von der weiteren Betrachtung ausgeschlossen.)

Die Zuordnung der einzelnen λ-Werte zu den Äquipotentialkurven wird am einfachsten durch

$$\lambda = -\Pi$$

festgesetzt. Dann nimmt die λ-Koordinate von innen nach außen zu. — Bezeichnet man die Koordinate des Randes Σ mit L, also $\lambda_\Sigma = L$, so ist $L = -\Gamma_\Sigma$, wenn Γ_Σ den von der Belegung ϱ_Σ im Innengebiet erzeugten konstanten Wert des Koordinatenpotentials bedeutet.

Über die Verteilung der ϑ-Werte auf die Kraftlinien sei vorerst noch nichts festgesetzt.

Das Koordinatenpotential Π wurde oben definiert durch den Rand Σ, also eine bestimmte, hierdurch ausgezeichnete Kurve $\lambda = \text{const.}$ Es ist nun interessant, zu untersuchen, ob und wie sich dieses Potential durch andere Ladungen definieren und so die Ausnahmestellung des Randes Σ beseitigen läßt.

Nach den oben gemachten Annahmen ist das Potential Π in der ganzen Ebene *regulär* außer im Unendlichen, wo es das bekannte Verhalten von Potentialen im Endlichen gelegener Ladungen aufweist, und in diskreten, im Endlichen gelegenen Punkten oder Linienstücken. — Ist C eine ganz beliebige geschlossene Kurve, die alle im Endlichen gelegenen Singularitäten von Π umschließt, und (a) ein Punkt außerhalb C, so gilt die Formel

$$\Pi_a = \frac{1}{2\pi} \cdot \int \left(\Pi_C \cdot \frac{\partial \ln \frac{1}{E^{(a)}}}{\partial N_C} - \ln \frac{1}{E_C^{(a)}} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial N_C} \right) dC \text{ [3])},$$

die man leicht mittels des Greenschen Satzes erhält.

---

[2]) Die natürliche Belegung ϱ einer geschlossenen Kurve stellt die Verteilung einer elektrischen Konduktorladung auf jener Kurve von der Gesamtheit 1 im Gleichgewichtszustand dar. Sie erzeugt im Innern der Kurve ein konstantes Potential.

[3]) Hierin bedeutet Π_C die Werte von π auf C, $E_C^{(a)}$ die Entfernung eines Punktes auf C von (a) und N_C die äußere Normale von C. Das Unendliche ist bei der Ableitung dieser Formel zunächst durch eine zweite Kurve auszuschließen, jedoch verschwindet der Beitrag, den diese zu Π liefert (E. R. Neumann, Beiträge zu einzelnen Fragen der höheren Potentialtheorie, Leipzig 1912, S. 22, Formel 12).

Demnach ist Π außerhalb C darstellbar als Potential einer *einfachen Belegung* mit der Dichte $d_C = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial N_C}$ und einer *Doppelbelegung* mit dem Moment $m_C = \frac{1}{2\pi} \cdot \Pi_C$.

Durch Spezialisierung der Kurve C läßt sich hieraus alles Weitere über die Erzeugung von Π durch Kurvenbelegungen ablesen.

Nimmt man z. B. für C *eine beliebige Kurve* $\lambda = const.$, so ergibt sich durch einfache Überlegungen, daß das Koordinatenpotential Π mittels der *natürlichen Belegung* ϱ_λ jeder beliebigen Kurve $\lambda = \text{const.}$ gewonnen werden kann. Ist also irgendeine solche Kurve der Rand eines Innengebietes, so erhält man stets dasselbe Koordinatenpotential, also auch dasselbe Koordinatensystem. — Bezüglich der Doppelbelegung auf einer Kurve $\lambda = \text{const.}$ ergibt sich, daß $m_\lambda = -\frac{1}{2\pi} \cdot \lambda$, also konstant ist. Da aber eine *konstante* Doppelbelegung auf einer geschlossenen Kurve zum Potential in ihrem Außengebiet keinen Beitrag liefert, *kann man diese Doppelbelegung weglassen* (aber nur, wenn C mit der *ganzen* Kurve $\lambda = \text{const.}$ zusammenfällt).

Enthält C Teile von *Kraftlinien* $\vartheta = \text{const.}$, so sieht man, daß diese wegen $\frac{\partial \Pi}{\partial N_\vartheta} = 0$ *keine einfachen Belegungen* tragen. —

Durch Anwendung des Gaußschen Satzes, $\int \Delta \Pi \, d\tau = -\int \frac{\partial \Pi}{\partial \nu_s} \, ds$, auf ein zwischen zwei Kraftlinien, einer Kurve $\lambda = \text{const.}$ und einer beliebigen C-Kurve gelegenes Viereck (Fig. 2) folgt die Formel

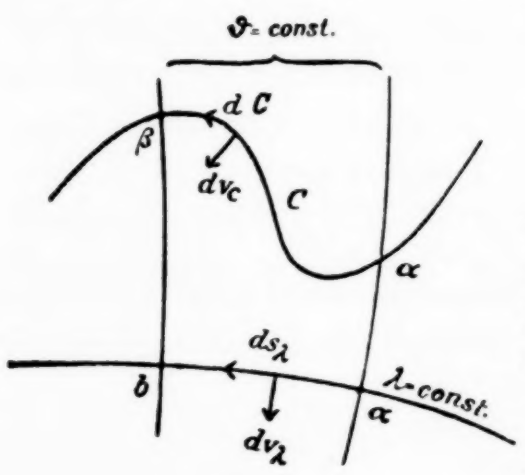


Fig. 2.

$$\int_a^b \frac{\partial \Pi}{\partial \nu_\lambda} \, ds_\lambda = \int_x^\beta \frac{\partial \Pi}{\partial \nu_C} \, dC \,,$$

welche aussagt, daß die einfache Belegung auf C zwischen den beiden Kraftlinien gleich ist der entsprechenden Belegung auf $\lambda = \text{const.}$ Hieraus ergibt sich das einfache Gesetz, daß man, ausgehend von einer Kurve C, die *einfache Belegung* auf einer anderen C-Kurve (neben welcher im allgemeinen noch eine Doppelbelegung auftritt) durch *Verschiebung der Ladung längs der* von den ϑ-Linien gebildeten *Kraftröhren* erhält.

Weiter folgert man hieraus, daß die Gesamtheit der *einfachen* Belegung auf jeder zur Definition von Π verwendeten Kurve C dieselbe ist. Nun ist der Rand Σ mit der Gesamtladung 1 versehen, woraus hervorgeht, daß *jede Kurve C die Gesamtladung* 1 trägt.

Ist C_1 eine beliebige geschlossene Kurve in der Ebene und C_2 eine zweite, die C_1 derart umschließt, daß zwischen ihnen keine singuläre Stelle von Π liegt, so gilt für einen Punkt (r) zwischen beiden Kurven:

$$\Pi_r = \frac{1}{2\pi} \cdot \int \left(\Pi_{C_1} \cdot \frac{\partial \ln \frac{1}{E^{(r)}}}{\partial N_{C_1}} - \ln \frac{1}{E^{(r)}_{C_1}} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial N_{C_1}} \right) dC_1 + \frac{1}{2\pi} \cdot \int \left(\Pi_{C_2} \cdot \frac{\partial \ln \frac{1}{E^{(r)}}}{\partial \nu_{C_2}} - \ln \frac{1}{E^{(r)}_{C_2}} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \nu_{C_2}} \right) dC_2 .$$

Aus dieser Formel lassen sich weitere Resultate gewinnen, und zwar in Bezug auf die Darstellung von Π durch Belegungen auf C_1 *und* C_2. Umschließen hierbei diese beiden

Kurven zufällig alle im Endlichen gelegenen Singularitäten von Π, so verschwindet das Integral über C_2, und man kommt auf den oben behandelten Fall mit einer einzigen C-Kurve zurück.

§ 2. Die funktionentheoretische Methode.

Sind (x, y) die kartesischen Koordinaten in der Ebene, so ist $\lambda = -\Pi$ eine Potentialfunktion von x und y. Man kann daher λ als *Realteil einer analytischen Funktion* $w_{(z)} = u_{(x,y)} + i \cdot v_{(x,y)}$ von $z = x + iy$ auffassen. Die Linien $u = const.$ sind dann identisch mit den früher eingeführten *Äquipotentialkurven*, während die Linien $v = const.$ mit den *Kraftlinien* zusammenfallen. Durch

$$\vartheta = v_{(x,y)}$$

ist dann eine einfache Zuordnung der ϑ-Werte zu den einzelnen Kraftlinien festgelegt. Es ist also

$$w_{(z)} = \lambda + i\vartheta .$$

Hierdurch ist das (λ, ϑ)-System bis auf eine belanglose additive Konstante in ϑ bestimmt. Es ist nun die Aufgabe, die funktionentheoretischen Eigenschaften von $w_{(z)}$ zu ermitteln.

$\varrho_{(x,y)}$ sei eine Funktion, die in jedem Punkt der Ebene den Wert ϱ_λ der natürlichen Belegung derjenigen λ-Kurve besitzt, die durch den betreffenden Punkt (x, y) geht. Mit Hilfe der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen und der bekannten Beziehungen zwischen Π und ϱ_λ erhält man dann unter Beachtung der Gleichwertigkeit aller Kurven $\lambda = \text{const.}$ folgende grundlegenden Formeln, in welchen ν_λ die nach innen gerichtete Normale und ∂s_λ das mit positivem Richtungssinn versehene Linienelement der λ-Kurve bedeutet:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \nu_\lambda} = -\frac{\partial \vartheta}{\partial s_\lambda} = -2\pi\varrho, \quad \frac{\partial \nu_\lambda}{\partial \lambda} = -\frac{\partial s_\lambda}{\partial \vartheta} = -\frac{1}{2\pi\varrho}, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial \nu_\lambda} = \frac{\partial \lambda}{\partial s_\lambda} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich zunächst im Außengebiet längs einer beliebigen λ-Kurve:

$$\int_{(\lambda)} d\vartheta = \int \frac{\partial \vartheta}{\partial s_\lambda} ds_\lambda = 2\pi \cdot \int \varrho \, ds_\lambda = 2\pi,$$

woraus hervorgeht, daß *die ϑ-Koordinate* längs jeder solchen Äquipotentialkurve *die Periode* 2π besitzt. Wegen der Eindeutigkeit von Π und seinen ersten Ableitungen im Außengebiet verhält sich demnach die Funktion $w_{(z)} = \lambda + i\vartheta$ daselbst auf dem obersten Blatt der Riemannschen Fläche wie $\ln z$. Hieraus folgt durch einfache Betrachtungen die Darstellung

$$w_{(z)} = \ln f(z)$$

für $w(z)$, worin $f(z)$ *im Außengebiet* auf dem obersten Riemannschen Blatt *keine Verzweigungspunkte* aufzuweisen hat.

Bei der analytischen Fortsetung von $w(z)$, welche nach den früher gemachten Einschränkungen über das ganze Innengebiet möglich ist, ergibt sich im Innengebiet ebenfalls die logarithmische Vieldeutigkeit und somit auch die oben angegebene Darstellung für $w(z)$, wobei allerdings *im Innengebiet* auch *Verzweigungspunkte* von $f(z)$ liegen können. Die mit diesen verbundenen Blätter der Riemannschen Fläche von $f(z)$, die für die Koordinatensysteme bedeutungslos sind, sollen in Zukunft zum *Innengebiet* gerechnet werden, obwohl sie sich auch unter das Außengebiet erstrecken.

Auf Grund der Eigenschaften des Koordinatenpotentials ergibt sich, daß $f(z)$ *im Außengebiet* mit Ausnahme des Punktes ∞ *regulär* ist und *keine Nullstelle* besitzt. *Bei* ∞ hat $f(z)$ *einen Pol*, da $|f(z)| = e^{\lambda}$ bei Annäherung an ∞ unbegrenzt zunimmt, und zwar einen *einfachen*, wie sich aus der Periode 2π der ϑ-Koordinate mit Hilfe des Cauchyschen Residuensatzes ergibt. Schließlich zeigen einfache topologische Betrachtungen, daß sich auch *keine Nullstellen von* $f'(z)$ im Außengebiet befinden (dies sind die Sattelpunkte von $|f(z)|$). — *Betreffs des Innengebiets existieren keinerlei Beschränkungen.*

Ist umgekehrt eine Funktion $f(z)$ gegeben, die den angegebenen Bedingungen genügt, so kann diese zur Erzeugung eines Koordinatensystems der betrachteten Art verwendet werden für Innengebiete, deren Rand zusammenfällt mit einem Zweig *einer Linie* $|f(z)| = const.$, der (abgesehen vom Pol bei ∞) *alle Singularitäten und Nullstellen von* $f(z)$, sowie *die Nullstellen von* $f'(z)$ umschließt. $f(z)$ ist in der Umgebung von ∞ darstellbar durch die Reihe

$$f(z) = \alpha z \cdot \left(1 + \frac{\beta}{z} + \frac{\gamma}{z^2} + \cdots\right),$$

in welcher nur der Imaginärteil des Faktors α unbestimmt ist, da die ϑ-Koordinate bis auf eine additive Konstante festliegt. Der Realteil von α wirkt sich in gleicher Weise auf die λ-Koordinate aus, so daß die Brauchbarkeit des Koordinatensystems nicht beeinträchtigt wird, wenn auch der Realteil von α unbestimmt gelassen wird. Allerdings ist dann die Festsetzung $\lambda = -\Pi$ nicht mehr erfüllt. Dasselbe gilt, wenn $f(z)$ einen mehrfachen Pol bei ∞ hat, was sich nur bei der Periode der ϑ-Koordinate bemerkbar macht.

Hält man an allen oben angegebenen Definitionen fest, so ergibt sich ein einfacher Zusammenhang zwischen den ϑ-Koordinaten, die ein Stück einer C-Kurve begrenzen und der einfachen Belegung, die dieses Kurvenstück trägt (daneben treten natürlich noch Doppelbelegungen auf). Sind ϑ_1 und ϑ_2 die Grenzkoordinaten, wobei der positive Richtungssinn des Kurvenstückes von ϑ_1 nach ϑ_2 läuft, so ergibt sich durch einfache Überlegungen mittels der Cauchy-Riemannschen Gleichungen zunächst *für ein Element* ds_λ *einer* λ*-Kurve die Ladung* $\frac{1}{2\pi} \cdot d\vartheta$, also *für das Stück* $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ *die Gesamtladung* $\frac{1}{2\pi} \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1)$. Da sich nun beim Übergang zu einer beliebigen C-Kurve die einfache Belegung längs der Kraftröhren verschiebt, gilt dies Resultat allgemein für *jede beliebige Kurve C.*

Die Belegungen, die *auf den singulären Punkten und Linien* des Koordinatenpotentials zur Darstellung von Π anzubringen sind, lassen sich leicht ermitteln auf einem funktionentheoretischen Weg, den G. Herglotz bei einer ähnlichen Untersuchung gegangen ist, nämlich zur Darstellung des Potentials einer mit der Dichte 1 belegten Fläche. Die Betrachtungen laufen so genau parallel den von Herglotz durchgeführten, daß es hier genügt, die Ergebnisse mitzuteilen und im übrigen auf die Abhandlung von Herglotz zu verweisen (Jablonowski-Preisschrift: Über die analytische Fortsetzung des Potentials ins Innere der anziehenden Massen).

Im Außengebiet ist

$$\Pi_a = \int \varrho_\Sigma \cdot \ln \frac{1}{E_\Sigma^{(a)}}\, d\Sigma.$$

Sind nun (ξ, η) die Koordinaten des Aufpunkts (a) und (x, y) die des auf dem Rand Σ laufenden Punktes, so ergibt sich daraus:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \xi} = \int \varrho_\Sigma \cdot \frac{x-\xi}{(E_\Sigma^{(a)})^2}\, d\Sigma, \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial \eta} = \int \varrho_\Sigma \cdot \frac{y-\eta}{(E_\Sigma^{(a)})^2}\, d\Sigma.$$

Setzt man noch $\xi + i\eta = \zeta$, so erhält man bis auf eine belanglose additive Konstante:

$$\Pi = \int \Big(\frac{\partial \Pi}{\partial \xi}\, d\xi + \frac{\partial \Pi}{\partial \eta}\, d\eta\Big) = \Re \int \Big(\frac{\partial \Pi}{\partial \xi} - i \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \eta}\Big) \cdot (d\xi + i\, d\eta) = \Re \iint \frac{\varrho_\Sigma}{z-\zeta}\, d\Sigma\, d\zeta,$$

d. h. $\Pi = \Re \int \Omega_{(\zeta)} d\zeta$ mit $\Omega_{(\zeta)} = \int \frac{\varrho_\Sigma}{z-\zeta}\, d\Sigma$, welches unter Berücksichtigung der Beziehungen $\varrho_\Sigma = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial \Sigma}$ und $w_{(z)} = \lambda + i\vartheta$ sowie der Konstanz der λ-Koordinate längs Σ durch einfache Umrechnungen übergeht in

$$\Omega_{(\zeta)} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{(\Sigma)} \frac{\frac{f'(z)}{f(z)}}{z-\zeta}\, dz.$$

Nun erhielt Herglotz für seine Potentiale den Ausdruck

$$V = \Re \int \Omega_{(\zeta)} d\xi \quad \text{mit} \quad \Omega_{(\zeta)} = \frac{1}{2i} \cdot \int_{(\Sigma)} \frac{v(z)}{z-\xi}\, dz,$$

wobei $v_{(z)}$ eine bestimmte analytische Funktion ist. *Ersetzt man also* $v_{(z)}$ *durch* $\frac{1}{\pi} \cdot \frac{f'(z)}{f(z)}$, so kann die weitere Untersuchung *wörtlich wie bei Herglotz* durchgeführt werden.

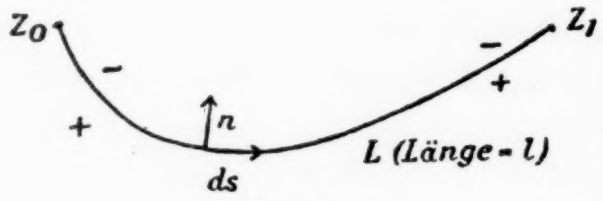


Fig. 3.

ε_h seien die Pole und Nullstellen von $f(z)$ [4]), E_h die Residuen von $\frac{f'(z)}{f(z)}$ in ε_h, ferner z_0 und z_1 die Endpunkte einer Linie L von der Länge l, der Normale n und dem Linienelement ds, die alle Verzweigungspunkte von $\frac{f'(z)}{f(z)}$ verbindet und die Verzweigungsschnitte enthält (Fig. 3).

Bezeichnet man die Ufer von L mit $+$ und $-$ (Fig. 3), setzt man $\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right)_+ - \left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right)_- = \omega_{(z)}$ und bestimmt zwei Funktionen $\sigma_{(s)}$ und $\tau_{(s)}$ auf L aus der Beziehung

$$\tau_{(s)} + i \cdot \int_0^s \sigma_{(s)}\, ds = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{z_0}^z \omega_{(z)}\, dz,$$

so ergibt sich, daß Π darstellbar ist *als Potential*

1. einer *einfachen Belegung* von L mit der Dichte $\sigma_{(s)}$,
2. einer *Doppelbelegung* auf L mit dem Moment $\tau_{(s)}$,
3. von *Ladungen* E_h in ε_h, welche also *in den Nullstellen* von $f(z)$ *positiv* und *in den Polen negativ* sind [5]).

---

[4]) Funktionen $f(z)$, die auf dem obersten Blatt der Riemannschen Fläche *wesentlich* singuläre Stellen besitzen, seien von den folgenden Betrachtungen ausgeschlossen.

[5]) Nebenbei ergibt sich noch die Formel $\int_0^l \sigma_{(s)}\, ds + \Sigma \mathsf{E}_h = 1$, welche aussagt, daß *die Gesamtheit aller Ladungen gleich* 1 *ist*, im Einklang mit den Ergebnissen des § 1.

Beachtet man die Beziehung $\ln f(z) = \lambda + i\vartheta$, so ergeben sich für $\sigma_{(s)}$ und $\tau_{(s)}$ die einfachen Darstellungen

$$\int_0^s \sigma_{(s)} ds = \frac{1}{2\pi} \cdot (\vartheta_+ - \vartheta_-), \quad \sigma_{(s)} = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{\partial \vartheta_+}{\partial s} - \frac{\partial \vartheta_-}{\partial s}\right), \quad \tau_{(s)} = \frac{1}{2\pi} \cdot (\lambda_+ - \lambda_-).$$

Die Belegungen von L befinden sich nur *auf den Teilen jener Kurve, die die Verzweigungsschnitte von* $\frac{f'(z)}{f(z)}$ *bedecken*, denn *längs der übrigen Stücke von* L ist $\omega_{(z)} = 0$, so daß $\sigma_{(s)}$ und $\tau_{(s)}$ *verschwinden.*

Dieselben Resultate würde man erhalten, wenn man sich die Linie L *durch Zusammenziehung einer Kurve* C um die singulären Punkte und Linien des Koordinatenpotentials entstanden denkt. Allerdings ergeben sich *für die Doppelbelegungen umgekehrte Vorzeichen*, was dadurch erklärt wird, daß im § 1 die Doppelbelegungen im *umgekehrten* Sinn definiert sind wie bei Herglotz.

§ 3. Ringgebiete.

Damit bei Ringgebieten *beide Ränder* der Schar $\lambda = \text{const.}$ angehören, hat man das Koordinatenpotential V so zu wählen, daß es an Σ *einen konstanten Wert* A und an σ *einen anderen konstanten Wert* a annimmt und im übrigen *im Ringgebiet regulär* ist. Ins Innen- und Außengebiet hinein wird V analytisch fortgesetzt, und zwar soll wieder vorausgesetzt werden, daß dies, wie früher bei Innengebieten, über die *ganze* Ebene möglich ist. — Wird A kleiner als a angenommen und wieder $\lambda = -V$ gesetzt, so nimmt die λ-Koordinate von innen nach außen zu wie bei Innengebieten.

Bezüglich der Darstellung von V durch Belegungen *auf zwei Kurven* (*eine* genügt im allgemeinen nicht) ergeben sich ähnliche Resultate wie in § 1 bei *II*. Bemerkenswert ist, daß bei Belegungen *auf zwei* λ*-Kurven* auf der *inneren* die Doppelbelegung *wegfällt*, hingegen *nicht* auf der *äußeren*, wo sie aber, da ihr Potential *konstant* ist, mittels der natürlichen Belegung jener Kurve durch eine *einfache Belegung* ersetzt werden kann.

An Stelle der Funktion $\varrho_{(x,y)}$ tritt eine andere, $\mu_{(x,y)}$ [6]), die definiert wird durch

$$\frac{\partial V}{\partial \nu_\lambda} = 2\pi\mu$$

und folgende grundlegenden Differentialbeziehungen erfüllt:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \nu_\lambda} = -\frac{\partial \vartheta}{\partial s_\lambda} = -2\pi\mu, \quad \frac{\partial \nu_\lambda}{\partial \lambda} = -\frac{\partial s_\lambda}{\partial \vartheta} = -\frac{1}{2\pi\mu}, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial \nu_\lambda} = \frac{\partial \lambda}{\partial s_\lambda} = 0.$$

Wie bei Innengebieten läßt sich auch hier mittels einer Funktion $w_{(z)} = \lambda + i\vartheta$ das Koordinatensystem bis auf eine additive Konstante in ϑ festlegen. Setzt man $w_{(z)} = \ln f(z)$, so ist $f(z)$ *im Ringgebiet eindeutig und stetig* und unterscheidet sich im übrigen von der entsprechenden Funktion bei Innengebieten nur dadurch, daß *bei* ∞ *kein einfacher Pol zu liegen braucht.* Befindet sich im Außengebiet keine wesentlich

---

[6]) Leichte Rechnungen zeigen, daß diese Funktion $\mu_{(x,y)}$ in der Ebene eine gewisse Rolle spielt bei der Transformation des Laplaceschen Differentialoperators Δ auf (λ, ϑ)-Koordinaten. Es ist nämlich

$$\Delta = 4\pi^2 \mu_{(x,y)}^2 \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2}\right).$$

Ferner läßt sich $\mu_{(x,y)}$ darstellen durch die Formeln

$$\mu_{(x,y)}^2 = \frac{1}{4\pi^2} \cdot w'(z) \cdot \overline{w}'(\overline{z}) = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{z'(w) \cdot \overline{z}'(\overline{w})}, \quad \mu_{(x,y)} = \frac{1}{2\pi} \cdot \left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|.$$

Entsprechendes gilt bei Innengebieten für die Funktion $\varrho_{(x,y)}$.

singuläre Stelle von $f(z)$ und hängt kein weiteres Blatt der Riemannschen Fläche durch Verzweigungsschnitte gleichzeitig mit dem Innen- und dem Außengebiet zusammen, so muß *im Außengebiet die Anzahl der Pole um 1 größer sein als die der Nullstellen*, wobei wieder die weiteren Riemannschen Blätter zu dem Gebiet zu zählen sind, mit dem sie zusammenhängen. Enthält das Innengebiet keine wesentliche Singularität, so ist dort *die Anzahl der Nullstellen um 1 größer als die der Pole. — Die Nullstellen von $f'(z)$ dürfen nicht im Ringgebiet liegen.*

Die Ergebnisse, die die Methode von Herglotz in Bezug auf die Darstellung des Koordinatenpotentials durch Belegungen in den singulären Punkten und Linien geliefert hat, gelten *wörtlich auch bei Ringgebieten.* —

Besitzt $f(z)$ zufällig einen einfachen Pol bei ∞, so ergeben sich als Spezialfall die in §§ 1—2 geschilderten Verhältnisse. Für solche Ringgebiete, die alle im Endlichen gelegenen Pole und Nullstellen von $f(z)$, sowie die Nullstellen von $f'(z)$ umschließen, geht dann auch die Funktion $\mu_{(x,y)}$ über in $\varrho_{(x,y)}$ und das Koordinatenpotential in das Potential der natürlichen Belegung eines der beiden Ränder.

§ 4. Beispiele.

In diesem Paragraphen werden Beispiele gegeben für die Funktion $f(z)$. Daß diese den in § 2 angeführten Bedingungen entsprechen, ist leicht zu übersehen und braucht daher hier der Kürze wegen nicht näher ausgeführt zu werden.

1.) $f(z) = z$.

Diese Funktion liefert das Koordinatensystem für *einfache Kreisgebiete.* Durch die Substitution $\lambda = \ln r$, $\vartheta = \varphi$ erhält man die gewöhnlichen *Polarkoordinaten.*

2.) $f(z) = z^2 - 1$.

Die Linien $\lambda = \text{const.}$ sind *Cassinische Kurven* mit den Brennpunkten ± 1. $f(z)$ hat bei ∞ einen Doppelpol, und ϑ besitzt die Periode 4π. Will man statt dessen die Periode 2π haben, so ist $f(z) = \sqrt{z^2 - 1} = z \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z^2} + - \cdots\right)$ zu setzen.

3.) $f(z) = \frac{z^n - 1}{z^{n-1}} = z \cdot \left(1 - \frac{1}{z^n}\right)$ (n = ganze positive Zahl).

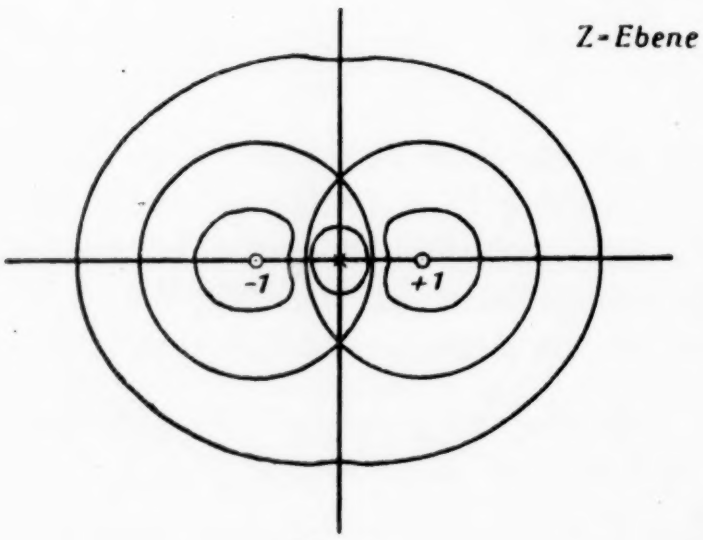


Fig. 4.

Brauchbar für Randkurven von Innengebieten sind diejenigen Linien $|f(z)| = \text{const.}$, die den Pol und die Nullstellen von $f(z)$ (bei 0 bzw. $\sqrt[n]{1}$), sowie die Nullstellen von $f'(z)$ (bei $\sqrt[n]{-(n-1)}$) umschließen. Fig. 4 zeigt die Äquipotentialkurven für $n = 2$.

4.) $f(z) = \frac{1}{2} \cdot (z + \sqrt{z^2 - 1})$.

Diese Funktion vermittelt den Übergang zu den gewöhnlichen *elliptischen Koordinaten* mit den Brennpunkten ± 1. Die λ-Kurven sind *konfokale Ellipsen.* Auf dem obersten Riemannschen Blatt gilt die Reihenentwicklung $f(z) = z \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{z^2} + - \cdots\right)$. Sie zeigt an, daß $f(z)$ alle Bedingungen für Innengebiete erfüllt.

5.) $z(f) = a \cdot f + \dfrac{b}{f^{n-1}}$ (a und b beliebige positive Konstanten, n = positive ganze Zahl $\geqq 2$).

Die Kurven $\lambda = \text{const.}$ sind *Hypozykloiden* (Fig. 5 für $n = 6$). Der Spezialfall

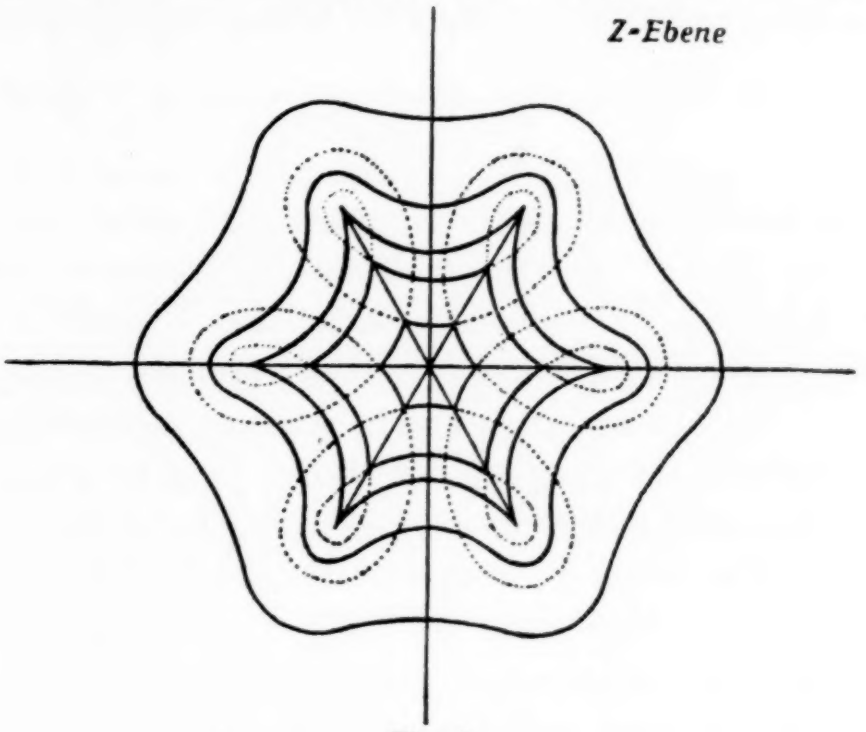


Fig. 5.

$a = n - 1$ ist schon von J. Philipps eingehend untersucht worden (Über die konforme Abbildung durch Rollkurven begrenzter Gebiete, Dissertation Marburg 1919, Abschnitt I.). Seine Ergebnisse lassen sich ohne weiteres verallgemeinern. Für $n = 2$, $a = 1$, $b = \dfrac{1}{4}$ ergibt sich als Spezialfall Beispiel 4.).

6.) $f(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$.

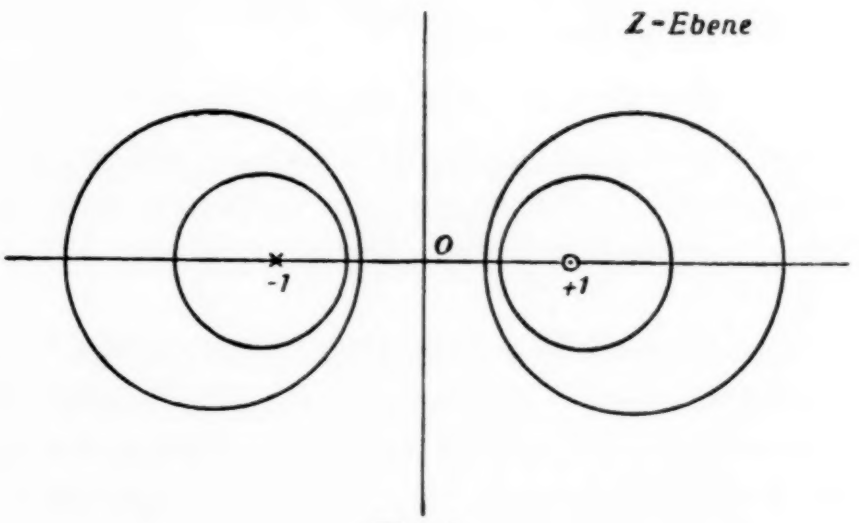


Fig. 6.

Die λ-Kurven bilden hier ein *Kreisbüschel* mit den Zentren ± 1. $f(z)$ hat keinen Pol bei ∞, entspricht aber im übrigen allen Forderungen für ein Ringgebiet, ist also zu verwenden für *exzentrische Kreisringe* (Fig. 6).

B. Orthogonale Koordinatensysteme im Raum.

§ 5. Das Koordinatenpotential und die Koordinatenflächen.

Das Problem und seine Lösung durch ein Koordinatenpotential V sind dieselben wie in der Ebene. Daher bleiben alle dort gültigen Voraussetzungen und Ergebnisse,

die auf dieses Problem Bezug haben, im Raum bestehen. In den Formeln ist nur 2π durch 4π und $\ln \frac{1}{E}$ durch $\frac{1}{E}$ zu ersetzen.

Ist wieder $\lambda = -V$ und definiert man eine Funktion $\mu_{(x,y,z)}$ durch die Beziehung

$$\frac{\partial V}{\partial \nu_\lambda} = 4\pi\mu,$$

so gelten für dieselbe die Formeln

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \nu_\lambda} = -4\pi\mu, \quad \frac{\partial \nu_\lambda}{\partial \lambda} = -\frac{1}{4\pi\mu}, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu_\lambda} = \frac{\partial v}{\partial \nu_\lambda} = 0,$$

wenn $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ die beiden zu den λ-Flächen senkrechten Koordinatenflächenscharen sind. — Bei Innengebieten und in gewissen Spezialfällen bei Ringgebieten stellt $\mu_{(x,y,z)}$ die natürliche Belegung ϱ_λ der durch (x, y, z) gehenden λ-Fläche dar.

Die funktionentheoretische Methode hat kein Analogon im Raum. Alle Beziehungen, die sich in § 2 zwischen den ϑ-Koordinaten und den einzelnen Kraftlinien ergeben, sind also *nicht auf den Raum zu übertragen.* —

Eine beliebig gegebene Flächenschar, kann *im allgemeinen* bekanntlich *nicht* einem *3-fach orthogonalen* Flächensystem angehören. Da aber hier die λ-Flächen speziell *Potentialflächen* sind, erhebt sich sofort die Frage, ob nicht eventuell das (λ, u, v)-System zu einem 3-fach orthogonalen gemacht werden kann. Dies ist jedoch zu *verneinen*, wie man an den Scharen ähnlicher und ähnlich gelegener Potentialflächen 2. Ordnung sieht. Bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems erfüllen diese die Gleichung

$$W_{(x,y,z)} = ax^2 + by^2 + cz^2 = \text{const.},$$

in welcher wegen $\Delta W = 0$ noch die Nebenbedingung $a + b + c = 0$ erfüllt sein muß. Wendet man hierauf die Bedingung für ein 3-fach orthogonales System an (G. Darboux, Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes, 2. Auflage 1910, S. 21), welche hier in der einfachen Gestalt

$$abc \cdot (b - c) \cdot (c - a) \cdot (a - b) = 0$$

erscheint, so sieht man, daß sie im allgemeinen *nicht erfüllt* ist, sondern nur für $a = 0$ oder $b = c$ samt den entsprechenden zyklischen Vertauschungen der a, b, c. Daß die betrachteten Flächen *Potentialflächen* sind, bleibt in Bezug auf dieses Ergebnis *ohne Einfluß.*

Man muß also im allgemeinen auf die Orthogonalität der u- und v-Flächen verzichten und die Kraftlinien irgendwie geeignet zu zwei solchen Flächenscharen verbinden. Für die Anwendung der Koordinatensysteme *bequem* (nämlich im Hinblick auf Entwicklungen nach Kugelfunktionen), aber *keineswegs notwendig* ist es, wenn u die Werte zwischen -1 und $+1$ und v die zwischen 0 und 2π annimmt.

Wendet man die vorliegenden Koordinatensysteme auf potentialtheoretische oder ähnliche Probleme an, so tritt häufig der Ausdruck $\mu \cdot ds_\lambda$ auf. Einfache flächentheoretische Betrachtungen zeigen, daß

$$4\pi\mu \cdot ds_\lambda = \sqrt{\frac{EG - F^2}{K}}\, du\, dv = \frac{\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2}}{\sin(u, v) \cdot \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} \cdot \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}\, du\, dv$$

ist, worin E, F, G die bekannten Fundamentalgrößen 2. Ordnung sind und mit K der Ausdruck $x_\lambda^2 + y_\lambda^2 + z_\lambda^2$ bezeichnet wird. Es erweist sich daher als praktisch, die u- und v-Flächen so zu wählen, daß $\mu \cdot ds_\lambda$ eine möglichst einfache Form erhält.

§ 6. Beispiel: Rotationsflächenscharen mit gemeinsamer Achse.

Die Potentialflächen $\lambda = \text{const.}$ seien *Rotationsflächen*, deren gemeinsame Achse in der Z-Achse liegt.

Als v-Flächen verwendet man am besten *Meridianebenen*, indem man die v-Koordinaten festsetzt durch $v = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$. Dann läuft v von 0 bis 2π.

Die Flächen $u = \text{const.}$ erhält man dadurch, daß man in einem Meridianschnitt zu den λ-Kurven die *Orthogonaltrajektorien* zieht und *die Meridianebene rotieren läßt.* Auf diese Art ergibt sich sogar ein 3-*fach orthogonales* System. Die Zuordnung der u-Koordinaten zu den einzelnen Flächen soll so bestimmt werden, daß der Ausdruck $\mu \cdot ds_\lambda$ die einfache Gestalt $\frac{1}{a} \cdot du\,dv$ annimmt, worin a eine zunächst noch unbestimmte *Konstante* ist.

Setzt man $x^2 + y^2 = r^2$, so ist wegen der Orthogonalität $\sin(u, v) = 1$ und $u_r \lambda_r + u_z \lambda_z = 0$. Hieraus ergibt sich:

$$u_r = p_{(r,z)} \cdot \lambda_z, \quad u_z = - p_{(r,z)} \cdot \lambda_r$$

mit einer später zu bestimmenden Funktion $p_{(r,z)}$, die vorerst nur der Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial z}(p \cdot \lambda_z) + \frac{\partial}{\partial r}(p \cdot \lambda_r) = 0$$

unterworfen ist.

Einfache Rechnungen ergeben:

$$\mu \cdot ds_\lambda = \frac{r}{p_{(r,z)}}\, du\, dv.$$

Soll dieser Ausdruck gleich $\frac{1}{a} \cdot du\,dv$ werden, so muß

$$p = a \cdot r$$

sein. Die Integrabilitätsbedingung geht dann über in

$$ar \cdot (\lambda_{zz} + \lambda_{rr} + \frac{1}{r} \cdot \lambda_r) = 0$$

und diese Beziehung ist erfüllt, wie man sich leicht überzeugt, wenn man die Laplacesche Gleichung $\Delta\lambda = 0$ zu Hilfe nimmt.

Die Integration der Differentialgleichungen

$$u_r = ar \cdot \lambda_z \quad \text{und} \quad u_z = - ar \cdot \lambda_r$$

bietet dann keine Schwierigkeiten mehr. Die unbestimmte Konstante a und eine neu hinzutretende Integrationskonstante können dazu verwendet werden, die u-Koordinaten so festzulegen, daß u von -1 bis $+1$ läuft.

Ist z. B. das Koordinatenpotential definiert durch *m diskrete Achsenpunkte* mit den Koordinaten z_i, die *die Ladungen* σ_i tragen, und *n mit Ladungen* von den Dichten $\tau_{j(z)}$ *belegte, auf der Achse gelegene Strecken* mit den Endpunkten z_j und $\bar{z}_j$, haben diese Belegungen *die Gesamtladung* 1 und umschließen die λ-Flächen (eventuell in mehreren getrennten Stücken) *alle Singularitäten von* V, so wird das Koordinatensystem bestimmt durch

$$\lambda = -\left[\sum_1^m \frac{\sigma_i}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z_i)^2}} + \sum_1^n \int_{z_j}^{\bar{z}_j} \frac{\tau_j(\zeta)}{\sqrt{x^2+y^2+(z-\zeta)^2}}\, d\zeta\right]$$

$$u = \sum_1^m \frac{\sigma_i \cdot (z-z_i)}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z_i)^2}} + \sum_1^n \int_{z_j}^{\bar{z}_j} \frac{\tau_j(\zeta)\cdot(z-\zeta)}{\sqrt{x^2+y^2+(z-\zeta)^2}}\, d\zeta$$

$$v = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}.$$

C. Anwendung auf die Eigenfunktionen derjenigen Integralgleichung, deren Kern aus einer 2. Greenschen Funktion des Grundgebiets besteht.

Ist δ_s eine Randfunktion des Grundgebiets, die der Nebenbedingung $\int \delta_s\, ds = 1$ genügt, so läßt sich mit ihrer Hilfe eine 2. *Greensche Funktion*[7]) des Grundgebiets definieren, die man *zum Kern einer Integralgleichung* machen kann. *Die Eigenfunktionen* dieser Integralgleichung erfüllen *die Differentialgleichung* $\Delta\varphi + k^2\varphi = 0$ und bilden 2 *Gruppen*, die folgenden *Randbedingungen* unterworfen sind:

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{Gruppe a)} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial n_s} = 0 \\ \textit{Gruppe b)} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial n_s} = 2h\pi\cdot\delta_s \end{array}\right\} \int \varphi_s\cdot\delta_s\, ds = 0.$$

Hierin bedeutet n_s die ins Grundgebiet gerichtete Randnormale und h in der Ebene die Zahl 1, im Raum die Zahl 2.

Für *Innengebiete* fällt die Normale n_s zusammen mit ν_Σ. Bei Anwendung der im Abschnitt A. eingeführten Koordinatensysteme in der Ebene gehen dann wegen $\frac{\partial \nu_\Sigma}{\partial\lambda} = -\frac{1}{2\pi\cdot\varrho_\Sigma}$ und $\frac{\partial\Sigma}{\partial\vartheta} = \frac{1}{2\pi\cdot\varrho_\Sigma}$ die Randbedingungen über in

$$\left.\begin{array}{ll} \text{a)} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial\lambda_\Sigma} = 0 \\ \text{b)} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial\lambda_\Sigma} = -\dfrac{\delta_\Sigma}{\varrho_\Sigma} \end{array}\right\} \int_0^{2\pi} \varphi_\Sigma\cdot\frac{\delta_\Sigma}{\varrho_\Sigma}\, d\vartheta = 0.$$

Werden schließlich φ und $\frac{\delta_\Sigma}{\varrho_\Sigma}$ in *Fourierreihen* nach ϑ entwickelt (was im allgemeinen möglich ist, da es sich um stetige und reguläre Funktionen handelt), nämlich

$$\varphi = A_{0(\lambda|k)} + \sum_1^\infty [A_{\nu(\lambda|k)}\cdot\cos(\nu\vartheta) + B_{\nu(\lambda|k)}\cdot\sin(\nu\vartheta)]$$

$$\frac{\delta_\Sigma}{\varrho_\Sigma} = \alpha_0 + \sum_1^\infty [\alpha_\nu\cdot\cos(\nu\vartheta) + \beta_\nu\cdot\sin(\nu\vartheta)],$$

so erhalten die Randbedingungen die Gestalt

$$A'_{0(L|k)} = 0, \quad A'_{\nu(L|k)} = 0, \quad B'_{\nu(L|k)} = 0 \quad \text{für die Gruppe a)}$$

$$A'_{0(L|k)} = -\alpha_0, \quad A'_{\nu(L|k)} = -\alpha_\nu, \quad B'_{\nu(L|k)} = -\beta_\nu \quad \text{für die Gruppe b)}$$

$$2\alpha_0\cdot A_{0(L|k)} + \sum_1^\infty (\alpha_\nu\cdot A_{\nu(L|k)} + \beta_\nu\cdot B_{\nu(L|k)}) = 0 \quad \text{für beide Gruppen.}$$

---

[7]) Vgl. H. Jung, Die 2. Greenschen Funktionen als Kerne von homogenen Integralgleichungen zweiter Art, Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. 163, S. 89.

Aus dieser Form der Randbedingungen sind die Fourierkoeffizienten der Eigenfunktionen und die Eigenwerte k zu bestimmen, in der Praxis meist mittels der Differentialgleichung $\Delta\varphi + k^2\varphi = 0$. Bei Zugrundelegung speziellerer Randfunktionen δ_s ergeben sich hierdurch interessante Resultate über die Eigenfunktionen φ und ihr Verhalten am Rand.

Für *Ringgebiete* erhält man ähnliche Ergebnisse. An Stelle von ϱ_Σ tritt μ_Σ ein, außerdem ist noch der *Innenrand* zu berücksichtigen, an welchem die Normale n_s mit N_σ zusammenfällt.

Ebenso werden die entsprechenden Untersuchungen *im Raum* durchgeführt. Hier erscheint nur die *Integralrandbedingung* in *etwas komplizierterer Form*, da statt $d\vartheta$ der in § 5 angegebene Ausdruck für $\mu \cdot d\Sigma$ einzusetzen ist. An Stelle der *Fourierreihen* treten naturgemäß entsprechende *zweidimensionale Entwicklungen*, z. B. solche nach *Kugelfunktionen.*

Besonders einfach werden die Randbedingungen (in der Ebene wie im Raum), wenn man $\delta_\Sigma = \mu_\Sigma$ und bei Ringgebieten außerdem $\delta_\sigma = 0$ setzt. Dies ist möglich, da, wie man leicht mit Hilfe des Gaußschen Satzes feststellen kann, μ die Nebenbedingung $\int \mu_\lambda \cdot ds_\lambda = 1$ erfüllt. Hierdurch erhält man *speziellere* 2. *Greensche Funktionen*, die aber *nur in gewissen Spezialfällen* mit denjenigen 2. Greenschen Funktionen übereinstimmen, die sich nach E. R. Neumann durch *besondere Symmetrieeigenschaften* auszeichnen und durch $\delta_\Sigma = \varrho_\Sigma$, $\delta_\sigma = 0$ definiert sind [8]), nämlich dann, *wenn* μ_Σ *in* ϱ_Σ *übergeht* (also vor allem stets bei *Innengebieten*).

Zum Scluhß sei noch erwähnt, daß auch die 2. Greenschen Funktionen selbst und die Grundlösungen $\ln \frac{1}{E_j^{(i)}}$ bzw. $\frac{1}{E_j^{(i)}}$ der Laplaceschen Differentialgleichung interessante Eigenschaften in ihren Fourier- bzw. Kugelfunktionsentwicklungen aufweisen. Aus Raummangel kann jedoch hierauf nicht näher eingegangen werden.

[8]) E. R. Neumann, Beiträge zu einzelnen Fragen der höheren Potentialtheorie, Jablonowski-Preisschrift, 1912.

Eingegangen 17. August 1929.

Zur Theorie der algebraischen Ringe.

Von *Trygve Nagell* in Oslo.

Ein Ring ist ein Zahlengebiet, in dem die Operationen der Addition, Subtraktion und Multiplikation unbegrenzt ausführbar sind. Enthält der Ring R alle Zahlen des Ringes R_1 und noch weitere Zahlen, so wird R ein Oberring von R_1 und R_1 ein Unterring von R genannt. Ein Ring von algebraischen Zahlen ist vom n-ten Grad, wenn Zahlen n-ten Grades darin vorkommen, aber keine Zahlen höheren Grades. Die Zahlen eines Ringes n-ten Grades liegen alle in demselben algebraischen Körper n-ten Grades. Es seien nämlich ξ eine Zahl n-ten Grades und α eine Zahl m-ten Grades, beide in dem gegebenen Ringe n-ten Grades. Gehörte α nicht zu dem Körper $k(\xi)$, so wäre der zusammengesetzte Körper $\Omega(\xi, \alpha)$ ein Oberkörper von $k(\xi)$. Dann würde es eine Zahl

$$\beta = \sum_{i,k} a_{ik}\, \alpha^i\, \xi^k \qquad \begin{pmatrix} 0 \leqq i < m \\ 0 \leqq k < n \end{pmatrix}$$

geben, mit ganzen rationalen Koeffizienten a, von einem Grade $\nu > n$. Dies ist aber unmöglich, da die Zahl $\beta - a_{00}$ zu dem Ringe n-ten Grades gehört und folglich höchstens vom Grade n ist. Die Zahl α liegt also in dem Körper $k(\xi)$.

In der Folge beschränken wir uns auf Ringe von *ganzen* algebraischen Zahlen. Es sei nun gegeben ein Ring R n-ten Grades; und es sei k der Körper n-ten Grades, der R enthält. Normen und Diskriminanten in R sind in bezug auf den Körper k definiert. In dem Ringe R gibt es ganze rationale Zahlen. Denn es sei α eine Zahl n-ten Grades in R. Dann gehört, wegen

$$\alpha^n + a_1\, \alpha^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\, \alpha = \pm N(\alpha)$$

mit ganzen rationalen a, auch die Norm von α zu dem Ringe. Es sei a die kleinste positive ganze rationale Zahl des Ringes. Dann sind die sämtlichen rationalen Zahlen in R gegeben durch die Reihe

$$0, \pm a, \pm 2a, \pm 3a, \cdots.$$

Denn der größte gemeinsame Teiler von a und einer beliebigen ganzen rationalen Zahl in R gehört offenbar auch zu R und muß folglich gleich a sein.

In dem Ringe R gibt es Systeme von n bezüglich des Körpers k linear unabhängigen Zahlen. Denn ist ξ eine Zahl n-ten Grades im Ring, so sind die Zahlen $1, \xi, \xi^2, \ldots, \xi^{n-1}$ linear unabhängig. Es sei im Ring $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ ein System von n linear unabhängigen Zahlen mit der Eigenschaft, daß der Absolutwert der Diskriminante $D(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ möglichst klein ist. Dann beweist man, genau wie für Körper, daß jede Zahl α des Ringes in der Formel

$$x_1\, \omega_1 + x_2\, \omega_2 + \cdots + x_n\, \omega_n,$$

mit beliebigen ganzen rationalen x_i, enthalten ist, und zwar eindeutig. Das System $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ heißt eine Basis des Ringes; und die Zahl $D(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$, die offenbar nur vom Ringe abhängt, wird die Diskriminante des Ringes genannt. Ein Ring mit

den Basiszahlen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ wird mit $R(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ bezeichnet. Es gilt der folgende Satz:

Satz I. *Es sei ξ eine Zahl n-ten Grades in einem Ringe n-ten Grades. Dann gibt es eine Basis des Ringes von der Gestalt*

$$(1)\qquad \begin{aligned} \omega_1 &= a, \\ \omega_2 &= \frac{c_{21} + c_{22}\,\xi}{D(\xi)}, \\ \omega_3 &= \frac{c_{31} + c_{32}\,\xi + c_{33}\,\xi^2}{D(\xi)}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \omega_n &= \frac{c_{n1} + c_{n2}\,\xi + \cdots + c_{nn}\,\xi^{n-1}}{D(\xi)}, \end{aligned}$$

wo a die kleinste ganze positive rationale Zahl im Ring bedeutet, und wo die c_{ij} ganze rationale Zahlen sind, die den folgenden Ungleichungen genügen:

$$\begin{aligned} &0 \leqq c_{i1} < a\,|D(\xi)|, && (i = 2, 3, \ldots, n), \\ &0 \leqq c_{ij} < |D(\xi)|, && (i = 3, 4, \ldots, n;\ j = 2, 3, \ldots, n-1;\ j < i), \\ &0 < c_{ii} \leqq |D(\xi)|, && (i = 2, 3, \ldots, n). \end{aligned}$$

Der Beweis dieses Satzes folgt sofort, wenn wir für jedes i der Reihe $i = 2, 3, \ldots, n$ unter c_{ii} die kleinste natürliche Zahl verstehen, so daß im Ringe eine Zahl

$$\omega_i = \frac{c_{i1} + c_{i2}\,\xi + \cdots + c_{ii}\,\xi^{i-1}}{D(\xi)}$$

vorhanden ist. Da die Zahl ξ^{i-1} dem Ringe gehört, ist offenbar $c_{ii} \leqq |D(\xi)|$. Die Zahlen c_{ij}, für $j = 2, 3, \ldots, i-1$, können wir offenbar $\geqq 0$ und $< |D(\xi)|$ wählen, und die Zahlen $c_{i1} \geqq 0$ und $< a\,|D(\xi)|$. Die auf diese Weise konstruierten n Zahlen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ sind erstens linear unabhängig; denn ist es offenbar

$$D(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = a^2 \cdot \frac{(c_{22}\,c_{33} \cdots c_{nn})^2}{D(\xi)^{2n-3}} \neq 0.$$

Es sei zweitens α eine beliebige Zahl des Ringes. Dann ist bekanntlich (sogar für jede ganze Zahl des Körpers)

$$\alpha = \frac{b_1 + b_2\,\xi + \cdots + b_n\,\xi^{n-1}}{D(\xi)}$$

mit ganzen rationalen b. Wir teilen b_n durch c_{nn} und erhalten

$$b_n = h_n\,c_{nn} + r_n, \quad 0 \leqq r_n < c_{nn}.$$

Dann gehört die Zahl

$$\alpha - h_n\,\omega_n = \frac{b_1' + b_2'\,\xi + \cdots + r_n\,\xi^{n-1}}{D(\xi)}$$

zum Ring; nach der Definition von c_{nn} ist dann notwendig $r_n = 0$ und

$$\alpha - h_n\,\omega_n = \frac{b_1' + b_2'\,\xi + \cdots + b_{n-1}'\,\xi^{n-2}}{D(\xi)}.$$

Hierin ist ebenso b_{n-1}' durch $c_{n-1,\,n-1}$ teilbar, und folglich

$$\alpha - h_n\,\omega_n - h_{n-1}\,\omega_{n-1} = \frac{b_1'' + b_2''\,\xi + \cdots + b_{n-2}''\,\xi^{n-3}}{D(\xi)}$$

usf. bis zu

$$\alpha - h_n\,\omega_n - h_{n-1}\,\omega_{n-1} - \cdots - h_1\,\omega_1 = 0$$

mit ganzen rationalen h. Der Satz ist folglich bewiesen.

Die Zahl a^2 ist ein Teiler der Diskriminante des Ringes; denn es ist

$$D(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = a^2 \cdot D(1, \omega_2, \ldots, \omega_n).$$

Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ n beliebige Zahlen des Ringes $R(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$:

$$\alpha_i = a_{i1}\,\omega_1 + a_{i2}\,\omega_2 + \cdots + a_i\ \omega_n. \tag{2}$$

Die Diskriminante von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ist dann gleich

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = |a_{ij}|^2 \cdot D(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n), \tag{3}$$

wo $|a_{ij}|$ die Determinante aus den Koeffizienten bedeutet. Dann und nur dann bilden die α_i eine neue Basis, wenn $|a_{ij}| = \pm 1$ ist.

Betrachten wir nun die Ringe eines gegebenen Körpers n-ten Grades, und zwar ausschließlich die Ringe n-ten Grades von ganzen algebraischen Zahlen. Der umfassendste Ring des Körpers ist offenbar die Gesamtheit aller ganzen Zahlen des Körpers. Dieser Ring, der sogenannte Fundamentalring, ist Oberring von allen übrigen Ringen des Körpers. Es gibt aber noch unendlich viele verschiedene Ringe im Körper. Denn die Ringe $R(1, a\theta, (a\,\theta)^2, \ldots, (a\,\theta)^{n-1})$, wo θ eine ganze Körperzahl n-ten Grades ist, und wo a eine beliebige natürliche Zahl ist, sind alle verschieden, da die Diskriminanten verschieden sind.

Die Diskriminante ist eine Konstante des Ringes unabhängig von der Wahl der Basis. Dagegen brauchen Ringe mit derselben Diskriminante nicht identisch zu sein, wie das folgende Beispiel zeigt: Es sei α die reelle Wurzel der kubischen Gleichung $\alpha^3 - \alpha^2 + 5\alpha - 1 = 0$ und β die reelle Wurzel der Gleichung $\beta^3 - 2\beta^2 + \beta - 4 = 0$. Dann haben die beiden kubischen Ringe $R(1, \alpha, \alpha^2)$ und $R(1, \beta, \beta^2)$ die Diskriminante -416; und sie gehören zu demselben kubischen Körper. Wegen der Gleichung $\beta = \frac{3}{2} - \alpha + \frac{1}{2}\alpha^2$ sind die Ringe aber verschieden. Wenn die Basiszahlen eines Ringes in einem anderen Ringe enthalten sind, und wenn zugleich die Diskriminanten gleich sind, dann sind die Ringe identisch. Es sei R mit der Diskriminante D ein Oberring von R_1 mit der Diskriminante D_1. Dann ist $D_1 = Dk^2$, wo k eine ganze, rationale Zahl > 1 ist. Denn ist $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ eine Basis von R, und bilden die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, definiert durch die Gleichung (2), eine Basis von R_1, so ist in der Gleichung (3) $|a_{ij}|^2 > 1$.

Wir wollen darauf einige Sätze über Ringe mit gegebener Diskriminante beweisen.

Satz II. *In jedem Ring n-ten Grades mit der Diskriminante D gibt es eine Zahl $\xi = \xi^{(1)}$ n-ten Grades, die mit ihren Konjugierten $\xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(n)}$ den folgenden Ungleichungen genügt:*

$$|\xi^{(1)}| < |\sqrt{D}|, \quad |\xi^{(i)}| < 1, \qquad (2 \leqq i \leqq n), \tag{4}$$

wenn der Ring reell ist, und den Ungleichungen

$$|\xi^{(1)}| = |\xi^{(2)}| < |\sqrt{D}|, \quad |\xi^{(i)}| < 1, \qquad (3 \leqq i \leqq n), \tag{5}$$

wenn der Ring imaginär ist, und $\xi^{(2)}$ die zu $\xi^{(1)}$ konjugiert imaginäre Zahl bedeutet.

(Es ist möglich noch schärfere Resultate zu erhalten, wie ich später zeigen werde.)

Beweis: Es sei $\omega_1^{(1)}, \omega_2^{(1)}, \ldots, \omega_n^{(1)}$ eine Basis des Ringes; wir betrachten die n homogenen Linearformen

$$F_k = x_1\,\omega_1^{(k)} + x_2\,\omega_2^{(k)} + \cdots + x_n\,\omega_n^{(k)}.$$

Es sei zunächst der Ring reell; dann ist auch F_1 reell. Wenden wir nun den Minkowskischen Satz über lineare Formen [1]) auf die Formen F_k an, so ergibt sich: Es gibt ein System

[1]) Siehe z. B. E. Landau, Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale, Satz 116, S. 39.

ganzer rationaler, nicht sämtlich verschwindender x_i, so daß

$$|F_k| \leqq \alpha_k, \quad (1 \leqq k \leqq n),$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ positive Zahlen sind, deren Produkt $= |\sqrt{D}|$ ist; dabei entspricht jedem Paar konjugiert imaginärer F_k dasselbe α_k.

Unser Satz ist aber noch nicht bewiesen, da wir nicht wissen, ob die Werte der F_k vom n-ten Grade sind. Betrachten wir die Ungleichungen

$$(6) \qquad |F_1| < |\sqrt{D}| + 1, \quad |F_2| < 1, \ldots, |F_n| < 1.$$

Sie bestehen nur für endlich viele Werte von F_1. Unter diesen sei φ der kleinste positive. Gibt es keinen solchen Wert, so setzen wir $\varphi = |\sqrt{D}| + 1$. Wir nehmen zunächst an, daß $\varphi > |\sqrt{D}|$ ist, und bestimmen eine positive Zahl ε derart, daß $(1+\varepsilon)^{m-1} |\sqrt{D}| < \varphi$ wird. Nach dem Satz von Minkowski gibt es dann ein System ganzer rationaler x_i, so daß

$$|F_1| \leqq (1+\varepsilon)^{m-1} |\sqrt{D}|, \quad |F_k| \leqq \frac{1}{1+\varepsilon}, \quad (2 \leqq k \leqq n)$$

und folglich

$$|F_1| < \varphi, \quad |F_k| < 1, \qquad (2 \leqq k \leqq n)$$

wird; dies steht aber mit der von uns getroffenen Wahl der Zahl φ im Widerspruch. Es gibt folglich eine Lösung von (6) mit $\varphi \leqq |\sqrt{D}|$. Das Gleichheitszeichen kann nicht gelten; denn wäre $|F_1| = |\sqrt{D}|$, so würde $|F_2| = |\sqrt{D}| \geqq 1$. Da offenbar $\varphi > 1$ ist, so ist φ von allen ihren Konjugierten verschieden. Der Satz ist damit bewiesen.

Es sei darauf der Ring imaginär. Die entsprechende Linearform sei wie oben F_1 und die damit konjugiert imaginäre Form sei F_2. Wenden wir nun dasselbe Verfahren wie oben auf die Formen

$$Z_1 = \frac{F_1 - F_2}{\sqrt{-2}}, \qquad Z_2 = \frac{F_1 + F_2}{\sqrt{2}}, \quad F_3, \ldots, F_n$$

an, so ergibt sich: Die Ungleichungen

$$|Z_1| \leqq |\sqrt{D}|, \quad |Z_2| < 1, \quad |F_k| < 1, \qquad (3 \leqq k \leqq n)$$

haben mindestens eine Lösung in ganzen rationalen, nicht sämtlich verschwindenden Zahlen x_i. Für die entsprechenden Werte von F_1 und F_2 ergibt sich dann

$$|F_1| = |F_2| < \left|\sqrt{\frac{1}{2}(|D| + 1)}\right| \leqq |\sqrt{D}|.$$

Es ist offenbar $|F_1| = |F_2| > 1$. Aus $F_1 = F_2$ würde folgen, daß $|Z_2| = |\sqrt{2}\, F_1| < 1$. Folglich ist F_1 von allen seinen Konjugierten verschieden. Der Satz ist damit bewiesen.

Durch die Anwendung dieses Satzes auf Satz I folgt sofort:

Satz III. *Es gibt nur endlich viele algebraische Ringe mit gegebener Diskriminante* [2]).

Minkowski hat bewiesen, daß, wenn Δ die Diskriminante eines Körpers n-ten Grades mit $2s$ imaginären konjugierten Körpern ist, die folgende Ungleichung besteht [3]):

$$|\Delta| > \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2s} \cdot \frac{e^{2n - \frac{1}{6n}}}{2\pi n}.$$

Hieraus folgt, daß der Grad n der Ringe mit gegebener Diskriminante D durch D beschränkt ist. In einem Ringe n-ten Grades mit der Diskriminante D gibt es dem Satze II

---

[2]) Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung des Satzes von Minkowski, daß nur endlich viele algebraische Körper dieselbe Diskriminante haben können. Siehe Minkowski, Geometrie der Zahlen (Leipzig 1910).

[3]) Siehe Minkowski, Geometrie der Zahlen.

zufolge eine Zahl ξ n-ten Grades, die mitsamt ihren Konjugierten einen Absolutwert $< |\sqrt{D}|$ hat. Mit Hilfe dieser Zahl ξ konstruieren wir nun eine Basis des Ringes wie im Satz I. Dann ergeben sich für die Zahlen $\omega_i = \omega_i^{(1)}$ und ihre Konjugierten $\omega_i^{(k)}$ die folgenden Ungleichungen

$$|\omega_i^{(k)}| \leqq |\sqrt{D}| + \sum_{r=1}^{i-1} |\xi^{(k)}|^r < i\,|\sqrt{D}|^i, \qquad \begin{pmatrix} 1 \leqq k \leqq n \\ 1 \leqq i \leqq n \end{pmatrix}.$$

Für die Zahlen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ bestehen also nur endlich viele Möglichkeiten. Unsere Methode gibt offenbar auch ein Verfahren um die sämtlichen Ringe mit gegebener Diskriminante wirklich zu bestimmen. Der Satz I gibt ein Mittel um eine Basis des durch ξ erzeugten Körpers zu bestimmen.

Aus Satz III folgt sofort: *Ein Ring n-ten Grades hat nur endlich viele Oberringe n-ten Grades, die natürlich alle zu demselben Körper n-ten Grades gehören.* Es gilt ferner der Satz: *Eine ganze algebraische Zahl n-ten Grades kommt nur in endlich vielen Ringen n-ten Grades vor.* Kommt nämlich die Zahl α in dem Ringe $R(a, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ vor, wo a wie bisher die kleinste positive ganze rationale Zahl des Ringes bedeutet, so kommt sie auch in dem Ringe $R(1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ vor. Nun ist $D(a, \omega_2, \ldots, \omega_n) = a^2 \cdot D(1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$, es ist weiter $D(\alpha)$ ein Multiplum von $D(1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$. Da endlich a ein Teiler von $N(\alpha)$ ist, folgt

$$|D(a, \omega_2, \ldots, \omega_n)| \leqq N^2(\alpha) \cdot |D(\alpha)|.$$

Die Diskriminante ist also durch α beschränkt und folglich auch die Anzahl der Ringe.

Eingegangen 7. Januar 1930.

Bernoullische Polynome und elliptische Funktionen.

Von *W. Maier* in Frankfurt a. M.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung 85
§ 1. Ein elementarer Grenzfall 86
§ 2. Basis Bernoullischer Polynome 89
§ 3. Kroneckers s-Funktion 91
§ 4. Zerlegung von $s\sigma'$ 93
§ 5. Rationale t-Rekursion 96
§ 6. Additionstheoreme 98
§ 7. Spaltung von s-Produkten 99
§ 8. Zusammenhang mit ϑ-Funktionen 101
§ 9. Neubegründung der Theorie 104
§ 10. Das Siegelsche Prinzip 104
§ 11. Beispiele 107
§ 12. Invarianten 109

Zur Theorie der elliptischen Funktionen kann man verschiedene Wege gehen. Durch Umkehrung algebraischer Integrale und das Verfahren des arithmetisch-geometrischen Mittels wurden die frühesten Ergebnisse gewonnen; spätere Bearbeiter benutzten die ganze Transzendente $\vartheta(v)$ oder die meromorphe Funktion $\wp(u)$ als Ausgangspunkt; eine abstraktere Behandlung wurde gegeben vermittels komplexer Integration.

Der vorliegende Ansatz geht mit Weierstraß von einer besonderen Darstellung aus, um die elliptischen Funktionen einzuführen; dem Vorgang Kroneckers folgend verzichten wir aber auf absolute Konvergenz der eingehenden unendlichen Prozesse und können deshalb die darstellenden Funktionen freier gestalten, werden sie so beweglich halten, daß sie Bernoullische Polynome und periodische Funktionen umfassen. Zwei Arbeitsgebiete von arithmetischem und analytischem Interesse treten damit in enge Berührung; es gelingt Tatsachen aus der Theorie der Differenzengleichungen zu verstehen als Erscheinungen im Gebiet der Jacobischen Funktion $\vartheta(v)$.

Im Mittelpunkt der Rechnung steht für $0 < x < 1,\ 0 < y < 1,\ 0 < |J(\omega)|$, $u \not\equiv 0 \pmod{1, \omega}$ die Kroneckersche Funktion

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{-n}^{n}{}' \frac{e^{2\pi i(xh+yk)}}{u+h+\omega k} = s(x, y),$$

die von seiten der Nenner her an $\operatorname{ctg} u$ und $\zeta(u)$ von Weierstraß erinnert, während die exponentiellen Faktoren der Zähler einen Zusammenhang schaffen mit der transzendenten Darstellung Bernoullischer Polynome. Diese s-Funktion genügt einer Funktionalgleichung (§ 3.4) und entartet mit $|J(\omega)| \to \infty$ zur erzeugenden Funktion $f(x)$ der Bernoullischen Polynome (§ 1). Überraschend ist, daß bei diesem Grenzprozeß die formalen Beziehungen unverändert bleiben, so daß elementare Rekursionen zwischen Bernoullischen Polynomen sich wörtlich übertragen auf das kompliziertere Gebiet der

neuen Funktionen; und eben diese rationalen Beziehungen reichen zur Bestimmung der neuen Funktionen aus, sobald drei Anfangswerte t_1, t_2, t_3 bekannt sind (§ 5). Im Grenzfall $\omega \to \infty$ werden die beiden letzten rational bestimmt durch $\lim_{\omega\to\infty} t_1 = g_1$, sind also voneinander algebraisch abhängig. Das abweichende Verhalten der neuen Funktionen

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\pm n}^{0<h^2+k^2} \frac{e^{2\pi i(xh+yk)}}{(h+\omega k)^\nu} = t_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist verursacht durch die Nichtexistenz endlicher Grenzwerte für $t_1(x, y)$ und $t_2(x, y)$ an der Stelle $x \to 0, y \to 0$ (§ 8). Das Versagen der trigonometrischen Darstellung im Punkt (0,0) geht hier — im Gegensatz zum elementaren Fall — Hand in Hand mit dem Auftreten von Singularitäten, deren verschiedener Charakter die algebraische Unabhängigkeit von t_1, t_2 nach sich zieht. Dagegen ist t_3 algebraisch immer von t_1, t_2 abhängig (§ 7), eine Aussage, die der Weierstraßschen Differentialgleichung für $\wp(y - \omega x)$ gleichwertig ist. Nachdem so die nächstliegenden Eigenschaften der t-Funktionen zur Verfügung stehen, gelingt deren Anwendung auf die Theorie der elliptischen Funktionen durch eine höchst elegante konstruktive Idee, die wir Herrn C. Siegel verdanken (§ 10, § 11). Es zeigt sich nämlich das t-Polynom $t_1^2 + 2t_2$ als meromorphe Funktion der einen Veränderlichen $y - \omega x = z$; die trigonometrische Darstellung gibt daher in der z-Ebene die doppeltperiodische Fortsetzung unter Umgehung der isolierten Singularitäten, und man findet die elliptische Funktion $t_1^2 + 2t_2 = \wp(y - \omega x)$. Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, die als Kennzeichen der Analytizität in z dabei auftraten, werden in § 12 abgebildet auf den „Ω-Prozeß“ und dadurch zur Herleitung projektiver Invarianten befähigt.

Die Anregung zu § 12 sowie die Gleichungen §§ 6. 3, 7. 5, 10. 5. 5″, 11. 5′ verdanken wir ebenfalls Herrn Siegel.

§ 1. Ein elementarer Grenzfall.

Sei $n = 1, 2, \ldots, 0 < x < 1, u \not\equiv 0\ (1)$ und

$$\sum_{-n}^{n} \frac{e^{2\pi i\nu x}}{u+\nu} = f_n(x).$$

Für $0 < \xi < 1$ wird $f_n(x) f_n(\xi) + \frac{d}{du} f_n(x+\xi) = \sum_{\pm n}^{\varkappa\neq\lambda} \frac{e^{2\pi i(x\varkappa+\xi\lambda)}}{(u+\varkappa)(u+\lambda)}$; rechts führe man die Zerlegung $\frac{\lambda-\varkappa}{(u+\varkappa)(u+\lambda)} = \frac{1}{u+\varkappa} - \frac{1}{u+\lambda}$ aus und gleiche in den von u freien Summanden die Gestalt des Exponenten dem Nenner an. Es entsteht

$$\begin{aligned}
f_n(x) f_n(\xi) + \frac{d}{du} f_n(x+\xi) &= \sum_{\pm n}^{\varkappa\neq\lambda} \frac{e^{2\pi i(x\varkappa+\xi\lambda)}}{\lambda-\varkappa}\left[\frac{1}{u+\varkappa} - \frac{1}{u+\lambda}\right] \\
&= \sum_{-n}^{n} \frac{e^{2\pi i(x+\xi)\varkappa}}{u+\varkappa} \sum_{\pm n}^{\lambda\neq\varkappa} \frac{e^{2\pi i\xi(\lambda-\varkappa)}}{\lambda-\varkappa} + \sum_{-n}^{n} \frac{e^{2\pi i(x+\xi)\lambda}}{u+\lambda} \sum_{\pm n}^{\varkappa\neq\lambda} \frac{e^{2\pi i x(\varkappa-\lambda)}}{\varkappa-\lambda} \\
&= \sum_{-n}^{n} \frac{e^{2\pi i(x+\xi)\varkappa}}{u+\varkappa} \sum_{\pm n}^{\lambda\neq\varkappa} \frac{1}{(\lambda-\varkappa)} \left[e^{2\pi i\xi(\lambda-\varkappa)} + e^{2\pi i x(\lambda-\varkappa)}\right] \qquad (1) \\
&= \sum_{-n}^{n} \frac{e^{2\pi i(x+\xi)\varkappa}}{u+\varkappa} \left\{ r_\varkappa + \sum_{-n+\varkappa}^{\substack{\lambda\neq\varkappa \\ n+\varkappa}} \frac{e^{2\pi i\xi(\lambda-\varkappa)} + e^{2\pi i x(\lambda-\varkappa)}}{\lambda-\varkappa} \right\} \\
&= \sum_{-n}^{n} \frac{e^{2\pi i(x+\xi)\varkappa}}{u+\varkappa} r_\varkappa + \sum_{-n}^{n} \frac{e^{2\pi i(x+\xi)\varkappa}}{u+\varkappa} \sum_{\pm n}^{\nu\neq 0} \frac{e^{2\pi i\xi\nu} + e^{2\pi i x\nu}}{\nu}.
\end{aligned}$$

In der letzten, von u freien Summe fällt der sinnlose Summand mit $v = 0$ aus; in der Summationsvorschrift schreiben wir weiterhin einfach $\sum_{v}^{v\neq 0} = \sum_{v}'$ und erhalten also

$$(2) \qquad f_n(x)\, f_n(\xi) + \frac{d}{du} f_n(x+\xi) - f_n(x+\xi) \sum_{-n}^{n}{}' \frac{e^{2\pi i \xi v} + e^{2\pi i x v}}{v} = \sum_{-n}^{n} \frac{e^{2\pi i (x+\xi)\varkappa}}{u+\varkappa}\, r_\varkappa ,$$

wo für $\varkappa = -n, -n+1, \ldots, 0, \ldots, n$ nach (1) die Teilreste

$$r_\varkappa = \sum_{-n+\varkappa}^{n+\varkappa} \frac{1}{v} [e^{2\pi i \xi v} + e^{2\pi i x v}] - \sum_{-n}^{n} \frac{1}{v} [e^{2\pi i \xi v} + e^{2\pi i x v}]$$

bestimmt sind. Mit einer von n freien Zahl c_1 schätzen wir

$$\begin{aligned}
|r_\varkappa| &< c_1(\xi, x) \Big| \sum_{n+1-|\varkappa|}^{n} \frac{1}{v} (e^{2\pi i \xi v} + e^{2\pi i x v}) \Big| \\
&< c_2(\xi, x) \Big| \sum_{n+1-|\varkappa|}^{n} \int_0^\infty dt\, e^{-vt}\, e^{2\pi i x v} \Big| \\
&\leqq c_2(\xi, x) \int_0^\infty dt\, e^{(|\varkappa|-1-n)t} \Big| \sum_{0}^{|\varkappa|-1} e^{(2\pi i x - t)\mu} \Big| \\
&= c_2(\xi, \varkappa) \int_0^\infty dt\, e^{(|\varkappa|-1-n)t} \left| \frac{1 - e^{(2\pi i x - t)|\varkappa|}}{1 - e^{2\pi i x - t}} \right| \\
&< c_3(\xi, x) \int_0^\infty dt\, e^{(|\varkappa|-1-n)t} \\
&= \frac{c_3(\xi, x)}{n+1-|\varkappa|};
\end{aligned}$$

mit wachsendem n ergibt sich für die rechte Seite in (2) als Betrag

$$\Big| \sum_{-n}^{n} \frac{e^{2\pi i (x+\xi)\varkappa}}{u+\varkappa}\, r_\varkappa \Big| < c_4(\xi, x, u) \sum_{1}^{n} \varkappa \frac{1}{\varkappa(n+1-\varkappa)}$$

$$< n^{-\frac{1}{2}} \quad \text{für} \quad n > n_0(c_4).$$

Links in (2) existiert die Grenzfunktion

$$(3) \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sum_{-}^{+}{}' \frac{e^{2\pi i v x}}{u+v} = f(x),$$

also auch $f(\xi)$ und bei der weiteren Einschränkung $0 < x + \xi < 1$ auch $f(x+\xi)$; die noch bleibende konvergente Reihe schreiben wir mit der Abkürzung

$$(4) \qquad \sum_{-}^{+}{}' \frac{e^{2\pi i x v}}{v} = g(x).$$

Mit $n \to \infty$ wird

$$(5) \qquad f(x)f(\xi) + \frac{d}{du} f(x+\xi) = f(x+\xi)[g(x) + g(\xi)],$$

eine Identität, welche für $0 < x < 1$, $0 < \xi < 1 - x$ die durch (3. 4) eingeführten Funktionen verbindet. Setzt man für $0 < x < 1$ eine Entwicklung von (3) nach steigenden Potenzen von u an:

$$f(x) = \sum_{-1}^{\infty} (-u)^\lambda g_{\lambda+1}(x),$$

so lauten die Koeffizienten

$$(6)\qquad \begin{aligned} g_0(x) &= -1 \\ g_1(x) &= \sum_{-}^{+}{}' \frac{e^{2\pi i x \nu}}{\nu} = g(x) \\ g_2(x) &= \sum_{-}^{+}{}' \frac{e^{2\pi i x \nu}}{\nu^2} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Sie sind verknüpft durch eine Differentialgleichung

$$(6')\qquad 2\pi i g_l(x) = g'_{l+1}(x) \qquad l = 0, 1, \ldots,$$

wie die Monome

$$g_l^*(x) = \frac{(2\pi i x)^l}{l!}.$$

Durch Vergleich der u-Koeffizienten in (5) überträgt sich obiges Additionsgesetz auf die Folge der g_l und lautet

$$(7)\qquad \sum_{-1}^{l+1}{}^{\lambda} g_{\lambda+1}(x)\, g_{l-\lambda+1}(\xi) = (l+1)\, g_{l+2}(x+\xi) + [g_1(x) + g_1(\xi)]\, g_{l+1}(x+\xi),$$

eine Rekursion also, welche $g_{l+1}(x+\xi)$ aufbaut aus $g_1(x+\xi)$ und $g_j(x)$, $g_j(\xi)$ für $j = 1, \ldots, l+1$. Z. B. für $l = 0, 1, \ldots$

$$\begin{aligned} &-g_2(\xi) + g_1(x)\, g_1(\xi) - g_2(x) = g_2(x+\xi) + [g_1(x) + g_1(\xi)]\, g_1(x+\xi) \\ &-g_3(\xi) + g_1(x)\, g_2(\xi) + g_2(x)\, g_1(\xi) - g_3(x) = 2g_3(x+\xi) + [g_1(x) + g_1(\xi)]\, g_2(x+\xi) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Aus (6) folgt die Existenz von $\lim_{x\to 0+} g_l(x)$, dessen Wert für $l > 1$ übereinstimmt mit dem Grenzwert der entsprechenden Summe, und man erkennt

$$\begin{aligned} \sum_{-}^{+}{}' \nu^{-l} = g_l(0) > 0 \quad &\text{für} \quad l = 2, 4, 6, \ldots \\ = 0 \quad &\text{„} \quad l = 3, 5, 7, \ldots \end{aligned}$$

Bezeichnet man $\lim_{x\to 0+} g_1(x) = g$, so ergibt (7)

$$g_1^2(0) + 3g_2(0), \quad \text{d. h.} \quad g \neq 0;$$

überdies findet man die Zahlen $g_2(0)$, $g_4(0)$, ... rational durch g allein bestimmt.

Indessen ist damit der Gehalt von (7) noch nicht erschöpft. Setzt man $\xi = 1 - x$ und vollzieht den weiteren Grenzübergang $x + \xi \to 1$, nachdem aus (6) die Spiegelungseigenschaft entnommen wurde:

$$g_l(1-x) = (-1)^l g_l(x),$$

so folgt für $l = 0, 2, 4, \ldots$

$$(7')\qquad (l+1)\, g_{l+2}(0) + \sum_{-1}^{l+1}{}^{\lambda} (-1)^\lambda g_{\lambda+1}(x)\, g_{l-\lambda+1}(x) = 0,$$

d. h. eine Rekursion, die aus $g_1(x)$, $g_3(x)$, $g_5(x)$, ... die Funktionen geraden Zeigers bestimmt.

Setzt man in (5) $-g + \lim_{x\to 0} f(x) = y(u) = y$, so genügt diese Funktion der Differentialgleichung

$$(5')\qquad y^2 + y' = g^2,$$

und zeigt die Zahlen $g_l(0)$ als ctg-Koeffizienten, d. h. im wesentlichen als Bernoullische Zahlen. Mit Cauchys Methoden wäre alles bisherige aus der Identität zu erschließen:

$$(8)\qquad \sum_{-}^{+}{}_{\nu} \frac{e^{2\pi i x\nu}}{u+\nu} = 2\pi i \, \frac{e^{-2\pi i x u}}{1-e^{-2\pi i u}};$$

für unseren Beweisgang genügt es, der Integralrechnung nur die engere Aussage zu entnehmen

$$(8')\qquad \lim_{x\to 0+} \sum_{-}^{+}{}'_{\nu} \frac{e^{2\pi i x\nu}}{\nu} = \pi i \quad \text{d. h.} \quad g_1(0) = g = \pi i,$$

um aus (7) die Zahlen $g_2(0) = \frac{\pi^2}{3}$, $g_4(0) = \frac{\pi^4}{45}, \ldots$ zu erhalten.

Wegen (7′) wird weiter

$$(9)\qquad g_1^2(x) + 2\,g_2(x) = -\frac{\pi^2}{3}$$

und nach (6′)

$$2\pi i\, g_1(x) = g_2'(x) = -\,g_1(x)\, g_1'(x),$$

woraus die Bestimmung

$$g_1'(x) = -\,2\pi i;$$

integriert wegen (8′):

$$g_1(x) = \pi i\,(1-2x)$$

und mit (6′):

$$(10)\qquad \begin{aligned} g_2(x) &= \pi^2\left(\frac{1}{3} - 2x + 2x^2\right) \\ g_3(x) &= \pi^3 i\left(\frac{2x}{3} - 2x^2 + \frac{4}{3}x^3\right) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Die Rekursion (7) für $l = 1$ und $\xi = x$ gibt folgende Duplikationsformel:

$$-\,g_3(x) + g_1(x) g_2(x) = g_3(2x) + g_1(x)\, g_2(2x)$$

$$(11)\qquad g_1(x) = \frac{g_3(x) + g_3(2x)}{g_2(x) - g_2(2x)},$$

die aus $g_1(\frac{1}{2}) = 0$ sofort auch zu $g_3(\frac{1}{2}) = 0$ führt.

§ 2. Basis Bernoullischer Polynome.

Für $l = 1, 3, 5 \ldots$ versagte die Rekursion (1. 7′), denn die Summanden fielen paarweise identisch in x fort, was in der symmetrischen Gestalt von (1. 5) begründet war. Aber die algebraische Grundlage unserer Entwicklung war doch eine Teilbruchzerlegung, und diese kann auch an allgemeineren Doppelreihen getätigt werden. Benutzt wurde für ganze $\lambda \not\equiv \varkappa$ und $u \not\equiv 0(1)$

$$\frac{1}{(u+\varkappa)(u+\lambda)} = \frac{1}{(u+\varkappa)(\lambda-\varkappa)} + \frac{1}{(u+\lambda)(\varkappa-\lambda)}.$$

Die Ausführung von $\lim_{n\to\infty} \sum_{-n}^{n}{}_{\varkappa\lambda}$ hätte direkt (1. 5′) ergeben; der additive Zusatz g^2 erscheint bei der Konvergenzuntersuchung, d. h. bei Größenschätzung des Restes hinsichtlich der Summationsgrenzen. In (1. 2) war solcher formal nicht vorauszusehende Zusatz vermieden, indem dort die rechte Seite auf den Betrag Null heruntergedrückt wurde, und dies wurde erzielt durch Exponentialfaktoren, welche eine Kompensation vieler Summanden im Mittel herbeiführten. Der erweiterte Ansatz, befähigt, die rekursiven Lücken in (1. 7′) zu schließen, geht aus für ganze $\varkappa \not\equiv \lambda$, $u \not\equiv 0(1)$ von

$$(1)\qquad \frac{1}{(u+\varkappa)(u+\lambda)^2} = \frac{1}{(u+\varkappa)(\lambda-\varkappa)^2} - \frac{1}{(u+\lambda)(\varkappa-\lambda)^2} + \frac{1}{(u+\lambda)^2(\varkappa-\lambda)}.$$

Rechterhand, im Nenner, geht der zweite Summationszeiger jeweils mit + und − Vorzeichen ein, so daß vermöge $e^{a+b} = e^a e^b$ die Zerlegung

$$(2)\quad \frac{e^{2\pi i(x\varkappa+\xi\lambda)}}{(u+\varkappa)(u+\lambda)^2} = \frac{e^{2\pi i(x+\xi)\varkappa}}{(u+\varkappa)}\,\frac{e^{2\pi i\xi(\lambda-\varkappa)}}{(\lambda-\varkappa)^2} - \frac{e^{2\pi i(x+\xi)\lambda}}{(u+\lambda)}\,\frac{e^{2\pi i(\varkappa-\lambda)}}{(\varkappa-\lambda)^2} + \frac{e^{2\pi i(x+\xi)\lambda}}{(\varkappa-\lambda)^2}\,\frac{e^{2\pi ix(\varkappa-\lambda}}{(\varkappa-\lambda)}$$

besteht, wo jedem u-Nenner ein $(x+\xi)$-Exponent des Zählers zugeordnet ist, während die Summationszeiger oben und unten korrespondieren. Durch Summation und Restschätzung erhält man aus (2) die gewünschte Verallgemeinerung von (1.5); mit der Bezeichnung $\frac{d}{du} f(x) = f'(x), \ldots$ lautet diese für $0 < x < 1,\ 0 < \xi < 1$

$$(3)\quad f(x)\,f'(\xi) = f(x+\xi)[g_2(x) - g_2(\xi)] + f'(x+\xi)\,g_1(x) - \tfrac{1}{2} f''(x+\xi).$$

Symmetrisiert man diese Identität durch x, ξ-Tausch und Addtion, so kann

$$(3')\quad f(x)\,f'(\xi) + f(\xi)\,f'(x) = f'(x+\xi)[g_1(x) + g_1(\xi)] - f''(x+\xi)$$

nach u integriert werden; wegen $\lim\limits_{u\to\infty} f(i|u|) = 0$ erscheint

$$f(x)\,f(\xi) = f(x+\xi)[g_1(x) + g_1(\xi)] - f'(x+\xi),\quad \text{d. h. (1.5)}.$$

Geht man von (3) zu entsprechenden Beziehungen der Koeffizienten $g_\nu(x)$ über, so gelingt es jetzt in der Tat, ein vollständiges Rekursionssystem anzugeben, d. h. eine Folge von Aussagen, die erlauben, aus endlich vielen vorgebenen $g(x)$ jedes andere rational zu bestimmen; genauer wird sogar jedes $g_\nu(x)$ dargestellt als Polynom in $g_1(x)$.

Der Ansatz $f(x) = \sum\limits_{-1}^{\infty} g_{\nu+1}(x)(-u)^\nu$ gibt für $\nu = 0, 1, \ldots$

$$\sum_{-2}^{\nu+1}(\lambda+1)g_{\lambda+2}(\xi)\,g_{\nu-\lambda+1}(x) = [g_2(\xi) - g_2(x)]g_{\nu+1}(x+\xi) + (\nu+1)\,g_1(x)g_{\nu+2}(x+\xi) + \binom{\nu+2}{2} g_{\nu+3}(x+\xi).$$

Die folgende übersichtlichere Schreibart soll von jetzt ab benutzt werden: Das Argument x werde unterdrückt, z. B. also $g_2(x) = g_2$ geschrieben; entsprechend, um ξ einzusparen, $g_{\lambda+2}(\xi) = \gamma_{\lambda+2}$.

$$(4)\quad \sum_{-2}^{\nu+1}(\lambda+1)\,\gamma_{\lambda+2}\,g_{\nu-\lambda+1} = [\gamma_2 - g_2]\,g_{\nu+1}(x+\xi) + (\nu+1)g_1\,g_{\nu+2}(x+\xi) + \binom{\nu+2}{2} g_{\nu+3}(x+\xi)$$

gilt also für $\nu = 0,1, \ldots,\ 0 < x < 1,\ 0 < \xi < 1 - x$.

Wir gebrauchen (4) im Grenzfall $x + \xi \to 1$; da wird

$$g_1 g_2 + 3g_3 = \lim_{x+\xi\to 1}\{[\gamma_2 - g_2]g_1(x+\xi) - g_1 g_2(x+\xi)\} = g_2(0)g_1$$

$$g_2^2 - 2g_1 g_3 - 2g_4 = 3g_4(0)$$

$$-g_2 g_3 + 3g_1 g_4 + 5g_5 = 3g_4(0)g_1$$

. . . . . .

Mit (1.9) entsteht so

$$g_1^2 + 2g_2 = -\frac{\pi^2}{3}$$

$$g_1 g_2 + 3g_3 = \frac{\pi^2}{3} g_1$$

$$g_2^2 - 2g_1 g_3 - 2g_4 = \frac{\pi^4}{15}$$

. . . . . .

und man entnimmt dieser rationalen Rekursion leicht die explizite Darstellung irgendeines Bernoullischen Polynoms durch g_1.

§ 3. Kroneckers *s*-Funktion.

Unsere Behandlung der Bernoullischen Polynome war ausgegangen von deren transzendenter Darstellung durch trigonometrische Reihen. Alle gewonnenen Ergebnisse hätten auch in umgekehrter Reihenfolge erreicht werden können: durch Differenzenrechnung eine rekursiv verbundene Polynomfolge, dann Differentialbeziehungen und Auflösung in unendliche Reihen. Der Vorteil der gegenwärtigen Angriffsrichtung liegt aber darin, daß die schon gefundenen Zusammenhänge der Funktionen

$$g_\nu(x) = \sum_{-\infty}^{+}{}' \frac{e^{2\pi i x \varkappa}}{\varkappa^\nu} \qquad \nu = 1, 2, \ldots, \; 0 < x < 1$$

sich formal ungeändert von (2. 4) übertragen auf eine allgemeinere Klasse analog darstellbarer Funktionen, so daß wir, ohne es zu wollen, uns schon bisher nicht nur mit Bernoullischen Polynomen, sondern gleichzeitig mit der Theorie der elliptischen Funktionen beschäftigten.

Sei ω komplex und $|J(\omega)| > 0$; man bilde

$$h + \omega k = \varkappa, \tag{1}$$

setze wieder $\sum_{\varkappa}^{\varkappa \neq 0} = \sum_{\varkappa}'$, $\sum_{-\infty}^{\infty}{}_{hk} = \sum_{-\infty}^{+}{}_{\varkappa}$, und wähle $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, $u \not\equiv 0 \pmod{1, \omega}$. Für $\nu = 1, 2, \ldots$ erklären wir eine Folge

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{-n}^{n}{}_{\varkappa}' \frac{e^{2\pi i(xh+yk)}}{\varkappa^\nu} = t_\nu(x, y) = t_\nu \tag{2}$$

als Verallgemeinerung der Polynome $g_\nu(x)$. Und wie sämtliche g_ν durch Grenzprozesse aus einer erzeugenden Funktion $f(x)$ hervorgingen, die zu kennzeichnenden Identitäten wie (2. 3) Anlaß gab, so führen wir neben den t_ν noch

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{-n}^{n}{}_{\varkappa} \frac{e^{2\pi i(xh+yk)}}{u+\varkappa} = s(x, y) = s \tag{3}$$

in die Betrachtung ein, einen Ausdruck, dessen Existenz um 1887 durch L. Kronecker bewiesen wurde. Die Konvergenz der Doppelreihe (2) ist trivial für $\nu > 2$; für $\nu = 2$ und $\nu = 1$ wird sie herbeigeführt erst durch die exponentiellen „Drehfaktoren", die im Gegensatz zu Weierstraßens konvergenzerzeugenden Faktoren nicht auf absolute Konvergenz abzielen. Das Bestehen der Grenzwerte (2) und (3) kann sichergestellt werden durch Umformung der Teilreihe

$$\sum_{0}^{n}{}_{h} \sum_{0}^{h}{}_{k} \frac{e^{2\pi i(xh+yk)}}{u+\varkappa} = s_n^* \qquad 0 < R(\omega), \; 0 < J(\omega) \tag{1'}$$

unter der engeren Voraussetzung $0 < R(u)$. Abkürzend setze man überdies für $0 < R(t)$

$$e^{2\pi i x - t} = v \quad \text{und} \quad e^{2\pi i y - \omega t} = w,$$

und findet

$$s_n^* = \int_0^\infty dt\, e^{-tu} \sum_{0}^{n}{}_{h} v_h \sum_{0}^{h}{}_{k} w_k$$

$$= \int_0^\infty \frac{dt\, e^{-tu}}{1-w} \sum_{0}^{n}{}_{h} [\, v^h - w\,(vw)^h]$$

$$= \int_0^\infty \frac{dt\, e^{-tu}}{1-w}\left[\frac{1-v^{n+1}}{1-v} - w\,\frac{1-(vw)^{n+1}}{1-vw}\right]$$

$$= \lim_{r\to\infty} \int_0^{r(1-i)} \frac{dt\, e^{-tu}}{1-w}\left\{\frac{1}{1-v} - \frac{w}{1-vw}\right\} - \lim_{r\to\infty} \int_0^{r(1-i)} \frac{dt\, e^{-tu}\, v^{n+1}}{1-w}\left\{\frac{1}{1-v} - \frac{w^{n+2}}{1-vw}\right\}.$$

Die Schwenkung des Integrationsweges sichert unterwegs die Beschränktheit des Integranden; nach (1′) existiert

$$\lim_{n\to\infty} s_n^* = \lim_{r\to\infty} \int_0^{r(1-i)} \frac{dt\, e^{-tu}}{1-w}\left\{\frac{1}{1-v} - \frac{w}{1-vw}\right\},$$

und somit auch über 8 Oktanten der h, k-Ebene erstreckt

$$(3') \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{-n}^{+n}{}_{h,k} \frac{e^{2\pi(xh+yk)}}{u+\varkappa} = s, \quad \text{sowie} \quad t_1, t_2.$$

Durch elementare Substitutionen schließlich befreit man sich von (1′) und erkennt die Gültigkeit von (2.3) für jedes $u \not\equiv 0 \pmod{1, \omega}$ und jedes nichtreelle ω.

Für $0 < |u| < \text{min.}\,(1, |\omega|)$ erscheint s als erzeugende Funktion der t_ν-Folge vermöge der Entwicklung

$$s = \sum_{-1}^{\infty} (-u)^\nu\, t_{\nu+1},$$

und wie in (1.6) empfiehlt es sich, die Erklärung (2) zu ergänzen durch die Festsetzung

$$t_0(x, y) = t_0 = -1.$$

Die in (2) gegebene spezielle Summationsvorschrift kann nach (1) für $\nu > 2$ auch in der Gestalt

$$(2') \qquad t_\nu = \sum_{-}^{+}{}_{hk}{}' \frac{e^{2\pi i(xh+yk)}}{\varkappa^\nu}$$

geschrieben werden, als unmittelbare Folge der hier vorliegenden absoluten Konvergenz. Umgekehrt werden die konvergenztechnisch besonders empfindlichen Ausdrücke t_1, t_2 zu interessanten Grenzwerten entsprechend (1.8′) führen.

Wir benötigen nun Zusammenhänge zwischen s und den t_ν, die zu deren Bestimmung dienen können, also jedenfalls identisch in u, x, y gelten müssen. Zu erwarten ist, daß solche Identitäten für $J(\omega) \to \infty$ auf diejenigen Beziehungen zurückfallen, welche zwischen

$$\lim_{J(\omega)\to\infty} s(x, y) = f(x)$$

und

$$\lim_{J(\omega)\to\infty} t_\nu(x, y) = g_\nu(x)$$

schon früher hergeleitet wurden, wie etwa Gleichung (2.3). Was wir finden, ist aber viel mehr, nämlich die ungestörte Übertragbarkeit von f, g-Aussagen der beiden ersten Paragraphen in das gegenwärtig behandelte s, t-Gebiet.

Wie in (2.4) werden wir durch Einsparung von Argumenten eine vereinfachte Schreibart benutzen.

$$(3'') \qquad \begin{array}{llll} \text{An Stelle von} & s(x, y) & \text{schreibe man nur} & s \\ \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} & s(\xi, \eta) & \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} & \sigma \\ \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} & t_\nu(x, y) & \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} & t_\nu \\ \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} & t_\nu(\xi, \eta) & \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} & \tau_\nu \\ \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} & s(x+\xi, y+\eta) & \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} & s(x+\xi)\,. \end{array}$$

Dabei gelte $0 < \xi < 1 - x$, $0 < \eta < 1 - y$, $\nu = 0, 1, \ldots$; und es werde $\frac{d}{du} s = s'$ bezeichnet. Man erhält alsdann eine Funktionalgleichung

$$(4) \qquad s\sigma' = (t_2 - \tau_2)\, s(x+\xi) + t_1\, s'(x+\xi) - \tfrac{1}{2} s''(x+\xi)$$

zwischen den durch (2. 3) eingeführten Transzendenten von genau der gleichen Bauart, wie die früher gefundene elementare Beziehung (2. 3), auf welche die Theorie der Bernoullischen Polynome gegründet werden konnte.

§ 4. Zerlegung von $s\sigma'$.

Nach (3.4) soll das Produkt $s\sigma'$ aufgespalten werden können in die Summe dreier von u abhängiger Bestandteile. Den Nachweis erbringen wir entsprechend dem zu (2.3) führenden Verfahren. Für $n = 1, 2, \ldots$ bilde man die endliche Doppelsumme

$$\sum_{-n}^{n}{}^{hk} \frac{e^{2\pi i(xh+yk)}}{u+\varkappa} = s_n .$$

Mit den Kürzungen (3.3″) forme man die „diagonalfreie“ vierfach erstreckte Summe

$$s_n \sigma_n' + \tfrac{1}{2} s_n''(x+\xi) = \varphi_n$$

durch Teilbruchzerlegung jedes Summanden um. Gliedweise gilt dann auch (2.2) und (3.1) für jeden φ_n-Summanden mit $p \equiv q \equiv 0(1)$, $p + \omega q = \lambda$

$$\frac{e^{2\pi i(xh+yk)}}{u+\varkappa}\,\frac{e^{2\pi i(\xi p+\eta q)}}{(u+\lambda)^2} = \frac{e^{2\pi i[(x+\xi)h+(y+\eta)k]}}{u+\varkappa}\,\frac{e^{2\pi i[\xi(q-h)+\eta(q-k)]}}{(\lambda-\varkappa)^2}$$
$$- \frac{e^{2\pi i[(x+\xi)p+(y+\eta)q]}}{u+\lambda}\,\frac{e^{2\pi i[x(h-p)+y(k-q)]}}{(\varkappa-\lambda)^2} + \frac{e^{2\pi i[(x+\xi)p+(y+\eta)q]}}{(u+\lambda)^2}\,\frac{e^{2\pi i[x(h-p)+y(k-q)]}}{\varkappa-\lambda},$$

und in dieser dreigliedrigen Zerlegung verschmelzen die beiden ersten Summanden rechterhand, wenn nach Ausführung der Summation h, k gegen p, q getauscht wird, was aus Symmetriegründen zulässig ist. Man erhält

$$-\varphi_n = \sum_{-n}^{n}{}^{hk} \frac{e^{2\pi i[(x+\xi)h+(y+\eta)k]}}{u+\varkappa} \sum_{\pm n}^{\lambda \neq \varkappa}{}^{pq} \frac{e^{2\pi i[\xi(p-h)+\eta(q-k)} - e^{2\pi i[x(p-h)+y(q-k)]}}{(\lambda-\varkappa)^2}$$
$$+ \sum_{-n}^{n}{}^{hk} \frac{e^{2\pi i[(x+\xi)h+(y+\eta)k]}}{(u+\varkappa)^2} \sum_{\pm n}^{\lambda \neq \varkappa}{}^{pq} \frac{e^{2\pi i[x(p-h)+y(q-k)]}}{\lambda - k}$$
$$= \sum_{-n}^{n}{}^{hk} \frac{e^{2\pi i[(x+\xi)h+(y+\eta)k]}}{u+k} \left\{ r_{hk1} + \sum_{-n}^{n}{}'^{lm} \frac{e^{2\pi i[\xi l+\eta m]} - e^{2\pi i[xl+ym]}}{(1+\omega m)^2} \right\}$$
$$(1) \qquad + \sum_{-n}^{n}{}^{hk} \frac{e^{2\pi i[(x+\xi)h+(y+\eta)k]}}{(u+\varkappa)^2} \left\{ r_{hk2} + \sum_{-n}^{n}{}'^{lm} \frac{e^{2\pi i[xl+ym]}}{1+\omega m} \right\}$$
$$= \sum_{-n}^{n}{}^{hk} \frac{e^{2\pi i[(x+\xi)h+(y+\eta)k]}}{u+\varkappa} \left\{ r_{hk1} + \frac{r_{hk2}}{u+\varkappa} \right\} + s_n(x+\xi) \sum_{-n}^{n}{}' \frac{e^{2\pi i[\xi l+\eta m]} - e^{2\pi i[xl+ym]}}{(l+\omega m)^2}$$
$$- s_n'(x+\xi) \sum_{-n}^{n}{}' \frac{e^{2\pi i[xl+ym]}}{l+\omega m}$$
$$= s_n(x+\xi) \sum_{-n}^{n}{}' \frac{e^{2\pi i[\xi l+\eta m]} - e^{2\pi i[xl+ym]}}{(l+\omega m)^2} - s_n'(x+\xi) \sum_{-n}^{n}{}' \frac{e^{2\pi i[xl+ym]}}{l+\omega m} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

wenn sich zeigen läßt, daß der Betrag der Vierfachsumme:

$$(2) \qquad \left| \sum_{-n}^{n}{}^{hk} \frac{e^{2\pi i[(x+\xi)h+(y+\eta)k]}}{u+\varkappa} \left\{ r_{hk1} + \frac{r_{hk2}}{u+\varkappa} \right\} \right| < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

bleibt. Dabei ist nach (1)

$$r_{hk1} = \sum_{\pm n}^{\lambda+\varkappa}{}_{pq} \frac{e^{2\pi i[\xi(p-h)+\eta(q+k)]} - e^{2\pi i[x(p-h)+y(q-k)]}}{(\lambda-\varkappa)^2} - \sum_{-n}^{n}{}'_{lm} \frac{e^{2\pi i[\xi l+\eta m]} - e^{2\pi i[xl+ym]}}{(l+\omega m)^2}$$

und

$$r_{hk2} = \sum_{\pm n}^{\lambda+\varkappa}{}_{pq} \frac{e^{2\pi i[x(p-h)+y(q-k)]}}{\lambda-\varkappa} - \sum_{-n}^{n}{}'_{lm} \frac{e^{2\pi i[xl+ym]}}{l+\omega m}.$$

In r_{hk1} genügt es, den x, y-Bestandteil zu transformieren, da dieser gleichberechtigt neben ξ, η in (2) eingeht; die Restsumme hier, wie in r_{hk2}, enthält, geometrisch gesprochen, Summationszeiger, welche solche Gitterpunkte eines Quadratmaschennetzes kennzeichnen, die eingebettet sind zwischen gleichgestellten Quadraten der Seiten $2n$ und der Verschiebungskoordinaten h, k. Solche Bereiche können zerlegt werden in die algebraische Summe von vier Rechtecken; für den Zweck unserer Restschätzung genügt es, davon ein nicht flächenkleinstes herauszugreifen. Der zugehörige Summenausdruck lautet mit $j = 1, 2$ und $k \leqq h$, frei von k,

$$\varrho_{hkj} = \sum_{n+1-h}^{n}{}_{l} \sum_{-n}^{n}{}_{m} \frac{e^{2\pi i(xl+ym)}}{(l+\omega m)^{3-j}} = \varrho_{hj}, \tag{3}$$

und an Stelle der Schätzung (2) reicht es aus, wegen der achtzähligen Drehsymmetrie des h, k-Summationsquadrates, den ersten Oktanten $k \leqq h$ zu betrachten, so daß nur das Paar von Ungleichungen zu bestätigen bleibt:

$$\left| \sum_{1}^{n}{}_{h} \sum_{0}^{h}{}_{k} \frac{e^{2\pi i[(x+\xi)h+(y+y)k]}}{(u+\varkappa)^j} \varrho_{hj} \right| < \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \text{für } n > n_0(x, \ldots, \omega). \tag{3'}$$

Sei zunächst ω rein imaginär:

$$J(\omega) = 0; \tag{4}$$

wie früher die Existenz von s, so wird jetzt die Größenordnung der Teilsumme ϱ_{kj} von t_{3-j} faßbar durch Einführung Eulerscher Integrale in (3). Es ist dort

$$\frac{1}{(1+\omega m)^{3-j}} = \int_0^\infty ds\, s^{2-j} e^{-s(l+\omega m)};$$

daher wird für $e^{2\pi i x - s} = v$, $e^{2\pi i y - s\omega} = w$

$$\begin{aligned}
\varrho_{hj} &= \sum_{n+1-h}^{n}{}_{l} \int_0^\infty ds\, s^{2-j} v^l \sum_{-n}^{n}{}_{m} w_m \\
&= \int_0^\infty ds\, s^{2-j} v^{n+1-h} \sum_{0}^{h-1}{}_{\mu} v^\mu \left\{ \sum_{-n}^{-1}{}_{m} w^m + \sum_{0}^{n}{}_{m} w^m \right\} \\
&= \int_0^\infty ds\, s^{2-j} v^{n+1-h} \frac{1-v^h}{1-v} \left\{ \frac{1-w^{-n}}{w-1} + \frac{1-w^{n+1}}{1-w} \right\} \\
&= \lim_{r\to\infty} \left\{ \int_0^{r(1+\omega)} ds\, s^{2-j} v^{n+1-h} \left(\frac{1-v^h}{1-v}\right)\left(\frac{1-w^{-n}}{w-1}\right) + \int_0^{r(1-\omega)} ds\, s^{2-j} v^{n+1-h} \left(\frac{1-v^h}{1-v}\right)\left(\frac{1-w^{n+1}}{1-w}\right) \right\}.
\end{aligned}$$

Die komplexe Verlegung der Integrationswege ist dabei so gewählt, daß die scheinbaren w-Quotienten beschränkte und von n unabhängige Beiträge zum Integral liefern; denselben Vorzug genießen alsdann auch die v-Quotienten bezüglich der Zahl h.

Wie früher bei (1. 2) gelingt so eine Abschätzung mit Zahlen $c(x, y, \omega) = c$ die von h und n frei sind:

$$|\varrho_{hj}| < c_1 \left\{ \lim_{r\to\infty} \left| \int_0^{r(1+\omega)} ds\, s^{2-j}\, v^{n+1-h} \frac{1}{(1-v)(w-1)} \right| + \left| \int_0^{r(1-\omega)} ds\, s^{2-j}\, v^{n+1-h} \frac{1}{(1-v)(1-w)} \right| \right\}$$

$$< c_2 \int_0^{\infty} ds\, s^{2-j}\, v^{n+1-h}$$

$$(3'') \quad < \frac{c_3}{n+1-h}\,.$$

Das benutzte Verfahren wiederholen wir bezüglich der inneren k-Summe in (3′). Für $0 < R(u+\varkappa)$ ist dort

$$(4') \qquad \frac{1}{(u+\varkappa)^j} = \int_0^{\infty} dt\, t^{j-1} e^{-ut-kt}:$$

also wird mit

$$e^{2\pi i(y+\eta)-\omega t} = z:$$

$$\frac{e^{2\pi i(y+\eta)k}}{(u+\varkappa)^j} = \int_0^{\infty} dt\, t^{j-1} e^{-nt-ht} z_k\,,$$

und der Betrag von

$$\sum_0^h \frac{e^{2\pi i(y+\eta)k}}{(u+\varkappa)_j} = \lim_{r\to\infty} \int_0^{r(1-\omega)} dt\, t^{j-1} e^{-nt-ht} \frac{1-z^{h+1}}{1-z} \quad \text{mit } c_4(x, y, \omega, \eta):$$

$$\left| \sum_0^h \frac{e^{2\pi i(y+\eta)k}}{(u+\varkappa)^j} \right| < c_4 \lim_{r\to\infty} \left| \int_0^{r(1-\omega)} dt\, t^{j-1} e^{-nt-ht} \right|, \quad \text{oder mit } c_5(x, y, \omega, \eta, u):$$

$$< c_5 \int_0^{\infty} dt\, t^{j-1} e^{-ht}$$

$$\leqq \frac{c_5}{h}\,.$$

Zusammen mit (3″) entsteht so

$$\left| \sum_1^n \sum_0^h \frac{e^{2\pi i[(x+\xi)h+(y+\eta)k]}}{(u+\varkappa)^j} \varrho_{hj} \right| \leqq \sum_1^n |\varrho_{hj}| \left| \sum_0^h \frac{e^{2\pi i(y+\eta)k}}{(u+\varkappa)^j} \right|$$

$$< c_6 \sum_1^n \frac{1}{(n+1-h)\,h}$$

$$(5) \qquad < \frac{1}{\sqrt{n}}\,,$$

wodurch in der Tat (3′) bestätigt ist; also gilt auch (2), und indem wir in der u- und ω-Ebene analytische Fortsetzung vollziehen, kann die bisher benutzte Einschränkung (4. 4′) wieder abgestreift werden, so daß (2) besteht für jedes u, ω mit

$$|J(\omega)| > 0, \quad u \not\equiv 0 \pmod{1, \omega}.$$

Nun führe man den Grenzübergang $n \to \infty$ für die in Teilbrüche zerlegte Vierfachsumme φ_n in (1) aus. Dann verschwindet vermöge (2) dort das Restglied, während nach (3.3′) die Existenz der eingehenden Summen feststeht, und man erhält

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = (t_2 - \tau_2)\, s(x+\xi) + t_1 s'(x+\xi),$$

d. h. den Beweis unserer Funktionalgleichung (3.4).

§ 5. Rationale t-Rekursion.

Wie früher angekündigt, können nun verschiedene Tatsachen aus dem Gebiet der Bernoullischen Polynome unmittelbar auf die Theorie der t-Funktionen übertragen werden. Die aus (2.3) fließende Koeffizientenbeziehung (2.4) wird nun vermöge (3.4) ins t-Gebiet abbildbar, indem für $\nu = 1, 2, \ldots, 0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < |J(\omega)|$ jeder der bekannten Ausdrücke

$$\sum_{-n}^{+}{}' \frac{e^{2\pi i x h}}{h^\nu} = g_\nu$$

formal ersetzt wird durch die zweifach ausgedehnte Reihe

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{-n}^{n}{}' \frac{e^{2\pi i(xh+yk)}}{(h+\omega k)^\nu} = t_\nu;$$

zusätzlich erklärten wir übrigens $g_0 = t_0 = -1$. Die Koeffizientenabspaltung der u-Potenzreihe (2.3), ausgesprochen mit den Kürzungen (3.3″), ergibt folgende t-Rekursion für $\nu = 0, 1, \ldots$

$$(1)\qquad \sum_{-2}^{\nu+1} (\lambda+1)\,\tau_{\lambda+2} t_{\nu-\lambda+1} = [\tau_2 - t_2] t_{\nu+1}(x+\xi) + [\nu+1]\, t_1 t_{\nu+2}(x+\xi) + \\ + \binom{\nu+2}{2} t_{\nu+3}(x+\xi),$$

d. h. im einzelnen

$$(1')\qquad t_3 + t_1\tau_2 - 2\tau_3 = [\tau_2 - t_2] t_1(x+\xi) + t_1 t_2(x+\xi) + t_3(x+\xi)$$

$$(1'')\qquad t_4 + t_2\tau_2 + 2t_1\tau_3 - 3\tau_4 = [\tau_2 - t_2] t_2(x+\xi) + 2t_1 t_3(x+\xi) + 3t_4(x+\xi)$$

$$t_5 + t_3\tau_2 + 2t_2\tau_3 + 3t_1\tau_4 - 4\tau_4 = [\tau_2 - t_2]\, t_3(x+\xi) + 3t_1 t_4(x+\xi) + 6t_5(x+\xi)$$

. . . . . .

oder für $k = 3, 4, \ldots$ eine rationale Bestimmung der Gestalt

$$t_k(x+\xi) = P\{t_1, \ldots, t_k;\ \tau_1, \ldots, \tau_k;\ t_1(x+\xi),\ t_2(x+\xi)\},$$

wobei P ein Polynom in seinen $2k+2$ Argumentfunktionen darstellt; indessen zeigt sich die Anzahl der eingehenden unabhängigen Argumente als viel kleiner. Wie nämlich jedes Bernoullische Polynom rational aus $g_1(x)$ und $g_1(\xi)$ aufzubauen war, so daß für $\varkappa = 2, 3, \ldots$ $g_k(x+\xi) = P_2(g_1, \gamma_1)$ galt, so entnimmt man aus den gegenwärtigen Entwicklungen Polynomdarstellungen des Typus

$$(2)\quad t_k(x+\xi) = P\{t_1, t_2, t_3;\ \tau_1, \tau_2, \tau_3;\ t_1(x+\xi),\ t_2(x+\xi)\} \text{ für } k = 3, 4, \ldots$$

Zur rationalen Darstellung der $t_k(x+\xi)$ reicht also eine höchstens achtgliedrige Basis aus. Dies erkennt man unter Benutzung der für $l = 0, 1, \ldots$ bestehenden Spiegelungseigenschaft

$$(3)\qquad t_l(1-x,\ 1-y) = (-1)^l t_l(x, y)$$

durch den Grenzübergang $x+\xi \to 1$, $y+\eta \to 1$ in (3.2). Für $\nu = 1, 2, \ldots$ wird trivialerweise $t_{2\nu+1}(0,0) = 0$, und es besteht allgemein $(-1)^\nu \lim\limits_{\substack{x+\xi\to 1\\ y+\eta\to 1}} t_{\nu+2}(x+\xi, y+\eta) = t_{\nu+2}(0,0)$.

Schwieriger ist die Beurteilung von $t_2(x, y)$ für kleine Argumente — im Gegensatz zum entsprechenden elementaren Fall, wo die g_2-Darstellung bei $x = 0$ noch absolut und gleichmäßig konvergierte.

Wir greifen auf (1′) zurück, benutzen es aber zweimal, wobei sich dank asymmetrischer Bauart eine Elimination ermöglicht. Aus (1′) und

$$\tau_3 + \tau_1 t_2 - 2t_3 = [t_2 - \tau_2] t_1(x+\xi) + \tau_1 t_2(x+\xi) + t_3(x+\xi)$$

folgt durch Addition

$$-\tau_3 + t_1\tau_2 + t_2\tau_1 - t_3 = [t_1 + \tau_1]t_2(x+\xi) + 2t_3(x+\xi)$$

und in der Grenze

$$\lim_{\substack{x+\xi\to 1\\ y+\eta\to 1}} [t_1 + \tau_1]t_2(x+\xi) = 0;$$

daraus folgt

$$\lim_{\substack{x+\xi\to 1\\ y+\eta\to 1}} [\tau_2 - t_2]t_2(x+\xi) = 0, \tag{4}$$

was nach (1″) eingetragen die Grenzgleichung gibt:

$$t_2^2 - 2t_1t_3 - 2t_4 = 3t_4(0) \tag{5}$$

und weiter

$$\begin{aligned} -t_2t_3 + 3t_1t_4 + 5t_4 &= 3t_4(0)t_1\\ -2t_3^2 + 4t_2t_4 - 4t_1t_5 - 4t_6 &= 10t_6(0)\\ t_3t_4 - 3t_2t_5 + 5t_1t_6 + 7t_6 &= 5t_6(0)t_1\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Damit ist (2) erwiesen, denn die Rekurisonen (5) gestatten, schrittweise $t_4, t_5, \ldots$ aus den drei Anfangsfunktionen herzustellen; auf der dreigliedrigen Basis t_1, t_2, t_3 existiert eine Polynomdarstellung für $k = 4, 5, \ldots$

$$t_k = P^*\{t_1, t_2, t_3\},$$

und die Anfangsglieder lauten so:

$$\begin{aligned} 2t_4 &= t_2^2 - 2t_1t_3 - 3t_4(0)\\ 10t_5 &= 2t_2t_3 - 3t_1t_2^2 + 6t_1^2t_3 + 15t_4(0)t_1 \qquad (5')\\ 10t_6 &= -5t_3^2 + 5t_2^3 - 12t_1t_2t_3 + 3t_1^2t_2^2 - 6t_1^2t_3 - 15t_4(0)[t_1^2 + t_2] - 25t_6(0).\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Die Bestimmung der Zahlfolge $t_4(0), t_6(0), t_8(0)$ durch Entfernung von t_1, t_2 aus dem System (5) und Übergang zu $x, y \to 0$ können wir übergehen, denn schon die Theorie der Weierstraßschen Funktion $\wp(u)$ zeigt deren rationale Erzeugung aus den beiden Anfangswerten $t_4(0)$ und $t_6(0)$; mit den beiden Invarianten der Weierstraßschen Theorie besteht übrigens folgender Zusammenhang:

$$t_4(0) = \sum_{-}^{+}{}'_{hk} (h + \omega k)^{-4} = \frac{1}{60} g_2$$

$$t_6(0) = \sum_{-}^{+}{}'_{hk} (h + \omega k)^{-6} = \frac{1}{140} g_3,$$

wobei $\wp(u) = \wp(u+1) = \wp(u+\omega)$ die zugehörige einfachste elliptische Funktion bedeutet.

Wir fahren fort in der Reduktion des Additionstheorems (2) der t-Funktionen. Läßt man an Stelle obiger Polynomdarstellung allgemeiner auch rationale Funktionen der t-Reihen zu, so kann die Anzahl der eingehenden Basiselemente von acht auf sechs heruntergedrückt werden; bedeutet also R eine rationale Funktion, so besteht für $k = 1, 2, \ldots$ ein Ausdruck

$$t_k(x+\xi) = R\{t_1, t_2, t_3;\ \tau_1, \tau_2, \tau_3\}. \tag{6}$$

Zum Beweis benutze man (1′ . 1″) für die dort stehenden Argumente, sowie für das System der griechisch-römisch getauschten: die vier entstehenden Gleichungen sind linear unabhängig dank der in t, τ asymmetrischen Bauart von (1), wenn die $t_k(x+\xi)$ als Unbestimmte betrachtet werden. Daher können $t_1(x+\xi)$ und $t_2(x+\xi)$ rational aus $t_1, \ldots, \tau_3$ gebildet werden, womit (6) erwiesen ist.

§ 6. Additionstheoreme.

Die im letzten Paragraphen gewonnenen Ergebnisse über t-Funktionen waren alle aus einer Quelle geschöpft, nämlich aus der s-Funktionalgleichung (3.4). Aber die Durchrechnung von (5.6) wird mühsam, und es empfiehlt sich, die drei zur R-Bestimmung angedeuteten Eliminationen zu umgehen. Dies ist möglich durch Verallgemeinerung von (3.4).

Es war im elementaren Grenzfall durch Symmetrisierung und Integration von (2.3) aus (1.5) erreicht worden. Zur Bestimmung der Integrationskonstanten war das Verhalten von $f(u)$ fern der reellen Achse gebraucht worden, etwa vermöge der Identität (1.8). Im gegenwärtigen komplizierteren Fall kommt man genau wie bei (1.'3) zu

$$s\sigma = [t_1 + \tau_1]\, s(x+\xi) - s'(x+\xi) + a(x, y, \xi, \eta),$$

wobei $\dfrac{\partial a}{\partial u} = 0$ ist; für die Bestimmung von a ist damit jedoch wenig gewonnen. Vielmehr ist es nötig, die Betrachtung (4. 1—5) wieder zu durchlaufen, hinsichtlich Umformung und Größenschätzung fast unverändert. Es zeigt sich $a = 0$, d. h.

$$s\sigma = [t_1 + \tau_1]\, s(x+\xi) - s'(x+\xi). \tag{1}$$

Diese besonders einfache s-Identität bleibt invariant gegen x, ξ-Tausch, im Gegensatz zu (3.4), so daß ein System von drei unabhängigen Aussagen durch beide zusammen geliefert wird, aus welchem die zwei Größen $s''(x+\xi)$ und $s'(x+\xi)$ entfernt werden können. Damit ist $s(x+\xi)$ rational ausgedrückt durch s, σ, s', σ' und t-Funktionen, — ein Sachverhalt der, auf eine Koeffizientenfolge abgebildet, eben den neuen Zugang zu dem durch (5. 6) angedeuteten Ausdruck schaffen wird. Beginnen wir damit, (3. 4) durch Variabelntausch und Subtraktion umzuformen! Es entsteht

$$-s\sigma' + \sigma s' = 2[\tau_2 - t_2]\, s(x+\xi) + [\tau_1 - t_1]\, s'(x+\xi);$$

andererseits

$$[\tau_1 - t_1]\, s\sigma = [\tau_1^2 - t_1^2]\, s(x+\xi) - [\tau_1 - t_1]\, s'(x+\xi),$$

$$\text{d. h.}\quad [\tau_1^2 + 2\tau_2 - (t_1^2 + 2t_2)]\, s(x+\xi) = [\tau_1 - t_1]\, s\sigma - s\sigma' + \sigma s'. \tag{2}$$

Mittels

$$s = \sum_{-1}^{\infty} (-u)^\nu t_{\nu+1}, \qquad \sigma = \sum_{-1}^{\infty} (-u)^\nu \tau_{\nu+1}$$

bilde man die Koeffizienten der u-Potenzen in (2) und vergleiche; so folgt für $\nu = 0, 1, \ldots$

$$[t_1^2 + 2t_2 - (\tau_1^2 + 2\tau_2)]\, t_{\nu+1}(x+\xi) = \sum_{-2}^{\nu+1} [t_1 - \tau_1]\, t_{\varkappa+1}\, \tau_{\nu-\varkappa+1} + \tag{2'}$$

$$+ (\varkappa+1)[t_{\varkappa+2}\tau_{\nu-\varkappa+1} - \tau_{\varkappa+2} t_{\nu-\varkappa+1}],$$

$$[(t_1^2 + 2t_2) - (\tau_1^2 + 2\tau_2)]\, t_1(x+\xi) = [t_1 - \tau_1]\{t_0\tau_2 + t_1\tau_1 + t_2\tau_0\} + (3\tau_0 t_3 + \tau_1 t_2 -$$

$$- \tau_2 t_1 - 3\tau_3 t_0) = \tau_1[t_1^2 + 2t_2] - t_1[\tau_1^2 + 2\tau_2] + (\tau_1\tau_2 + 3\tau_3) - (t_1 t_2 + 3t_3),$$

$$t_1(x+\xi) - t_1 - \tau_1 + \frac{[t_1^3 + 3t_1 t_2 + 3t_3] - [\tau_1^3 + 3\tau_1\tau_2 + 3\tau_3]}{[t_1^2 + 2t_2] - [\tau_1^2 + 2\tau_2]} = 0.$$

Freilich gehen wir mit (2') schon im Fall $\nu = 1$ einen Umweg, insofern die auftretenden Größen t_4, τ_4 unter Zuziehung von (5. 5') zu entfernen sind; will man dies direkt erreichen, so erweitere man (5.1') mit 2 und fälle den symmetrischen Bestandteil aus:

$$\sum_{0}^{3} \tau_\lambda t_{3-\lambda} = [t_1 + \tau_1]\, t_2(x+\xi) + 2t_3\,(x+\xi);$$

übrig bleibt die (bei x, ξ-Tausch) alternierende Funktion

$$\sum_0^3 (2\lambda - 3)\, \tau_\lambda t_{3-\lambda} = 2[\tau_2 - t_2]\, t_1(x+\xi) + [t_1 - \tau_1]\, t_2(x+\xi).$$

Andererseits folgt aus (1), wie in (1. 7) schon vorgerechnet,

$$(2'') \qquad -\tau_2 + \tau_1 t_1 - t_2 = [\tau_1 + t_1]\, t_1(x+\xi) + t_2(x+\xi);$$

somit kann $t_1(x+\xi)$ entfernt werden, und man hat

$$\begin{aligned}[(t_1^2 + 2t_2) - (\tau_1^2 + 2\tau_2)]\, t_2(x+\xi) \\ = [t_1 + \tau_1]\,(-3\tau_0 t_3 - \tau_1 t_2 + \tau_2 t_1 + 3\tau_3 t_0) + [t_2 - \tau_2]\,(\tau_2 - \tau_1 t_1 + t_2) \\ = t_1[\tau_1\tau_2 - 3\tau_3] - \tau_1[t_1 t_2 - 3t_3] + 3t_3 t_1 + t_2^2 + t_1^2\tau_2 - t_2 t_1^2 - t_2^2 - 3\tau_1\tau_3.\end{aligned}$$

Leitet man schließlich (2) nach u ab, so kann aus (1) das Argument $x+\xi$ entfernt werden. Man gelangt zu der Differentialbeziehung

$$(3) \qquad s\sigma'' - \sigma s'' + 2(t_1 s'\sigma - \tau_1 s\sigma') + 2[t_2 - \tau_2]\, s\sigma = 0.$$

Aus (1) folgt wie in (1. 11) eine Duplikationsformel:

$$(4) \qquad t_1 = \frac{t_3 + t_3(2x)}{t_2 - t_2(2x)}, \quad 0 < x < \tfrac{1}{2}, \quad 0 < y < \tfrac{1}{2}.$$

Nach (3) bleibt die u-Funktion

$$\frac{s''}{s} - 2t_1\frac{s'}{s} - 2t_2 \qquad \text{unabhängig von } x, y.$$

§ 7. Spaltung von s-Produkten.

Den Aussagen (3. 4) und (6. 1) gemeinsam ist die Zerlegung eines Produktes von s-Ableitungen in eine lineare Kombination ebensolcher; die links in den s-Faktoren auftretenden Argumentpaare x, y und ξ, η erscheinen rechts je zusammengesetzt zu $x+\xi$ bzw. $y+\eta$. Während der Beweis jener Identitäten wesentlich die Variabilität von u benutzte, um die Teilbrüche vergleichen zu können, formuliert sich die Behauptung durchsichtig bei Betonung der exponentiellen Argumente.

Wie in (3.3″) schreibe man abkürzend $s(x, y) = s(x)$, so daß aus jedem Argumentpaar eines Exponenten lediglich der x-Bestandteil angeschrieben wird. Im allgemeinen Fall von $m(= 1, 2, \ldots)$ solchen Paaren bleibe die Bezeichnung im lateinischen Alphabet; es sei

$$j = 1, 2, \ldots, m; \quad 0 < x_j < 1, \quad 0 < y_j < 1, \quad 0 < \sum_1^m x_j < 1, \quad 0 < \sum_1^m y_j < 1,$$

$$n_j, r = 0, 1, \ldots; \; u \text{ komplex}, \; \frac{\partial a}{\partial u} = 0, \; \frac{\partial^r s}{\partial u^r} = s^{(r)}.$$

Dann läßt sich jedes links stehende Produkt spalten:

$$\prod_1^m s^{(n_j)}(x_j) = \sum_0^r a_l s^{(l)}(x_1 + x_2 + \cdots + x_m),$$

und die von den x abhängigen $r+1$ Koeffizienten a sind Polynome in $t_1(x_1), \ldots, t_r(x_m)$.

Der Beweis dieses Entwicklungssatzes ist implizite in § 1—§ 6 schon enthalten; wir begnügen uns, hier einfache Sonderfälle herauszugreifen.

Wählt man in (1) $m = 3$, $n_j = 0$, d. h. entwickelt man das Produkt dreier s-Funktionen, so braucht man nicht sechsfach ausgedehnte unendliche Reihen zu betrachten, sondern gelangt durch Iteration schon benutzter transzendenter Prozesse in endlich vielen Schritten zum Ziel. Seien etwa die zugehörigen Potenzreihen bei $u = 0$ durch

$$s = -\frac{1}{u} + t_1 - t_2 u + t_3 u^2 \ldots$$

$$\sigma = -\frac{1}{u} + \tau_1 - \tau_2 u + \tau_3 u^2 \ldots$$

$$\mathfrak{f} = -\frac{1}{u} + \mathfrak{t}_1 - \mathfrak{t}_2 u + \mathfrak{t}_3 u^2 \ldots$$

gegeben, mit Argumenten $x, \xi, \mathfrak{x}$; $y, \eta, \mathfrak{y}$ die zugleich mit $x+\xi+\mathfrak{x}$ und $y+\eta+\mathfrak{y}$ zwischen 0 und 1 liegen. Dann ist $s\sigma\mathfrak{f} = [t_1+\tau_1]\mathfrak{f}s(x+\xi) - \mathfrak{f}s'(x+\xi)$, nochmals (6.1) angewendet:

$= [t_1+\tau_1]\{[\mathfrak{t}_1(\mathfrak{x}) + t_1(x+\xi)]\, s(x+\xi+\mathfrak{x}) - s'(x+\xi+\mathfrak{x})\} - \mathfrak{f}\, s'(x+\xi)$,

nach (3.4):

$= \{t_1\mathfrak{t}_1 + t_1 t_1(x+\xi) + \tau_1\mathfrak{t}_1 + \tau_1 t_1(x+\xi)\}\, s(x+\xi+\mathfrak{x}) - [t_1+\tau_1]\, s'(x+\xi+\mathfrak{x})\mathfrak{t} +$
$+ [t_2(x+\xi) - \mathfrak{t}_2]\, s(x+\xi+x) - \mathfrak{t}_1 s'(x+\xi+\mathfrak{x}) + \tfrac{1}{2} s''(x+\xi+\mathfrak{x})$, nach (6.2″):

(2) $= \{t_1\tau_1 + \tau_1\mathfrak{t}_1 + \mathfrak{t}_1 t_1 - t_2 - \tau_2 - \mathfrak{t}_2\}\, s(x+\xi+\mathfrak{x})$
$- [t_1+\tau_1+\mathfrak{t}_1]\, s'(x+\xi+\mathfrak{x}) + \tfrac{1}{2} s''(x+\xi+\mathfrak{x})$.

Als Sonderfälle können erwähnt werden für $0 < x < \frac{1}{3}$, $0 < y < \frac{1}{3}$

$$s^3 = 3[t_1^2 - t_2]\, s(3x) - 3t_1\, s'(3x) + \tfrac{1}{2} s''(3x);$$

für $0 < x, y, < 1$

$$s^2\, s(-x) = -[t_1^2 + 3t_2]\, s - t_1 s' + \tfrac{1}{2} s''.$$

Jetzt kommen wir zu einer Anwendung von (1), die über (3.4) hinausführt. Für komplexe $u \not\equiv 0 \pmod{1, \omega}$ bilde man unter den Voraussetzungen (3.1)

$$\frac{(\varkappa-\lambda)^3}{(u+\varkappa)^2(u+\lambda)^2} = \frac{2}{u+\varkappa} - \frac{2}{u+\lambda} + \frac{\varkappa-\lambda}{(u+\varkappa)^2} + \frac{\varkappa-\lambda}{(u+\lambda)^2},$$

und erhält eine Differentialbeziehung, die der Theorie von Weierstraßens $\wp$-Funktion nahesteht:

(3) $s'\sigma' = -2[t_3+\tau_3]\, s(x+\xi) - [t_2+\tau_2]\, s'(x+\xi) - \frac{1}{6} s'''(x+\xi)$.

Ein Koeffizientenvergleich lehrt für $\sigma = 0, 1, \ldots$

$$\sum_0^{\sigma+4} (\nu-1)(\sigma+3-\nu)\, t_\nu \tau_{\sigma+4-\nu} = -2[t_3+\tau_3]\, t_{\sigma+1}(x+\xi) +$$
$$+ (\sigma+1)[t_2+\tau_2]\, t_{\sigma+2}(x+\xi) + \binom{\sigma+3}{3} t_{\sigma+4}(x+\xi).$$

Wegen $\lim\limits_{x+\xi\to 2} [t_3+\tau_3]\, t_2(x+\xi) = 0$ vereinfacht sich die zugehörige Grenzbeziehung und liefert für $\sigma = 2, 4, 6, \ldots$

$$\sum_0^{\sigma+4} (-1)^{\sigma-\nu}(\nu-1)(\sigma+3-\nu)\, t_\nu t_{\sigma+4-\nu} = (2\sigma+2)\, t_{\sigma+2}(0)\, t_2 + \binom{\sigma+3}{3} t_{\sigma+4}(0).$$

Vergleichen wir die einfachste hierin enthaltene Aussage

(4) $$5t_6 + 3t_2 t_4 - 2t_3^2 = 3t_4(0)\, t_2 + 5t_6(0)$$

mit der für t_4, t_6 schon erhaltenen Darstellung (5.5′), so zeigt sich eine algebraische Beziehung zwischen t_1, t_2, t_3, die als Unterbau der früher behandelten rationalen t-Rekursion zuzufügen ist. Reduzieren wir (4) zu

$$\begin{aligned} 10t_6 &= 4t_3^2 - 6t_4 t_2 + 6t_4(0)\, t_2 + 10t_6(0) \\ &= 4t_3^2 - 3t_2[t_2^2 - 2t_1 t_3 - 3t_4(0)] + 6t_4(0)\, t_2 + 10t_6(0) \\ &= 4t_3^2 + 6t_1 t_2 t_3 - 3t_2^3 + 15t_4(0) t_2 + 10t_6(0), \end{aligned}$$

so kann hieraus und aus

$$10t_6 = -5t_3^2 - 12t_1t_2t_3 + 5t_2^3 - 6t_1^3t_3 + 3t_1^2t_2 - 15t_4(0)[t_1^2 + t_2] - 25t_6(0)$$

durch Elimination von t_6 der gewünschte Zusammenhang hergestellt werden. Man findet zwischen den einwertigen Funktionen $t_r(x, y)$ folgende Identität:

$$(5)\quad 9t_3^2 + 6[t_1^3 + 3t_1t_2]t_3 - \{8t_2^3 + 3t_1^2t_2^2 + 15t_4(0)[t_1^2 + 2t_2] + 35t_6(0)\} = 0,$$

so daß die rationale Rekursion (5. 5′) algebraisch so verfeinern ist: Auf der zweigliedrigen Basis t_1, t_2 ist identisch in x und y jede t-Funktion algebraisch darstellbar:

$$t_n = A(t_1, t_2) \quad \text{mit} \quad n = 3, 4, \cdots$$

Anders ausgesprochen ist also für drei paarweise verschiedene natürliche Zahlen p, q, r je ein nicht identisch verschwindendes Polynom P vorhanden, so daß

$$P(t_p, t_q, t_r) = 0;$$

die eingehenden Koeffizienten sind aus den zwei Größen $t_4(0)$ und $t_6(0)$ rational aufgebaut.

Entsprechend ist das Additionstheorem (6. 2′) algebraisch so auszugestalten: Für jedes natürliche n und passend eingeschränkte Argumentpaare ist ein nicht identisch verschwindendes Polynom

$$P^*\{t_1, t_2;\ \tau_1, \tau_2;\ t_n(x + \xi)\} = 0.$$

Gefunden wurde obige Identität (5) durch C. Siegel auf anderem Wege, der in (10. 5) aufgenommen werden soll und wobei Verwandtschaft mit Weierstraßschen Ergebnissen zutage tritt.

§ 8. Zusammenhang mit ϑ-Funktionen.

Während die grundlegende Funktionalgleichung (3. 4) und damit das Additionstheorem (6. 2′) der t-Funktionen ungeändert dem Formelapparat der Bernoullischen Polynome entlehnt werden konnte, treffen wir auf unterscheidende Merkmale zwischen g- und t-Reihen, wenn das Verhalten im Rand der Einheitsintervalle mitgenommen wird. In (2. 4) gab der Grenzübergang $x + \xi \to 1$

$$g_1^2 + 2g_2 = -\frac{\pi^2}{3}$$

$$g_1 g_2 - 3g_3 = \frac{\pi^2}{3} g_1,$$

was mit $g_3(0) = 0$ zur Bestimmung der Grenzwerte $g_2(0) = \frac{\pi^2}{3}$, $g_1^2(0) = -\pi^2$ ausreichte.

Die Theorie der t-Funktionen ist komplizierter; es existiert hier nur $\lim\limits_{y-\omega x\to 0}(y - \omega x)\, t_1 = 1$, sowie der obere Grenzwert $\overline{\lim\limits_{y-\omega x\to 0}}\, t_2$, und man gelangt zu diesen Tatsachen mit den bisher gebrauchten Hilfsmitteln etwa vermöge der Beziehungen

$$(1)\qquad \lim_{x-\xi\to 0}\{[\tau_2 - t_2]\, t_1(x + \xi) + t_1\, t_2(x + \xi)\} = t_1\, t_2 + 3t_3$$

$$(2)\qquad \lim_{x+\xi\to 0}\{[\tau_1 + t_1]\, t_1(x + \xi) + t_2(x + \xi)\} = -t_1^2 - 2t_2,$$

deren erste in (5. 4) schon benutzt wurde; (2) folgt durch Koeffizientenvergleich aus (6. 1) und ist äquivalent der dort eingehenden Integrationskonstanten. Es wird der neue Sachverhalt genau umschrieben durch die Existenz zweier Grenzwerte für $x \to 0$, $y \to 0$:

$$(3)\qquad \lim\left[\frac{1}{y - \omega x} - t_1(x, y)\right] \text{ und } \lim\left[\frac{2\pi i x}{y - \omega x} - t_2(x, y)\right].$$

Wir werden aber noch mehr beweisen als (3), indem wir uns von der definierenden Darstellung (3. 2) lösen und x, y komplex veränderlich denken. Die Betrachtung von $t_n(x, y)$ im Großen zeigt dann folgende überraschende Erscheinung: Eine im elementaren g_n-Fall durch die trigonometrische Darstellung nur vorgetäuschte Periodizität besteht hier in Wahrheit, und es ist $t_n(x, y) = t_n(x+1, y) = t_n(x, y+1)$, so daß (3. 2) sogar im Bereich $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$ geltend bleibt.

Die gewünschte analytische Fortsetzung von t_n in seine x, y-Ebenen wird vermittelt durch Kroneckers s-Funktion, deren Darstellung (3. 3) für komplexe u eine Umformung zuläßt, die auf anderem Wege schon von Kronecker selbst hergeleitet wurde.

Setzt man

$$e^{2\pi i x u} s = \lim_{n\to\infty} \sum_{-n}^{n} \frac{e^{2\pi i[x(u+h)+yk]}}{u+h+\omega k} = \Psi(u),$$

so wird

(4) $$\Psi(u+1) = \Psi(u)$$

$$\Psi(u+\omega) = e^{2\pi i \omega x} \lim_{n\to\infty} \sum_{-n}^{n} \frac{e^{2\pi i[x(u+h)+yk]}}{u+h+\omega(k+1)}$$

(4′) $$= e^{2\pi i(\omega x - y)} \lim_{n\to\infty} \sum_{-n}^{n} \frac{e^{2\pi i[x(u+h)+y(k+1]}}{u+h+\omega(k+1)}$$

(4′) $$= e^{2\pi i(\omega x - y)}\, \Psi(u).$$

Zur eindeutigen Festlegung von $\Psi(u)$ hat man zu (4. 4′) noch die Grenzformel zuzufügen:

(4″) $$\lim_{u\to 0} u\,\Psi(u) = 1.$$

Andererseits genügt die durch den Ausdruck

$$-i \sum_{-}^{+}{}_{\nu} (-1)^{\nu} e^{\pi i[\omega(\nu+\frac{1}{2})^2 + 2u(\nu+\frac{1}{2})]} = \vartheta(u)$$

gegebene Funktion Jacobis den Bedingungen

$$\vartheta(u+1) = -\vartheta(u)$$
$$\vartheta(u+\omega) = -e^{-\pi i(2u+\omega)}\vartheta(u)$$
$$\lim_{u\to 0} \frac{\vartheta(u)}{u} = \vartheta'(0).$$

Also muß mit $\frac{\partial\alpha}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial u} = 0$ der Ansatz gelten:

(5) $$\Psi(u) = \alpha(x, y)\, \frac{\vartheta(u+z)}{\vartheta(u)},$$

woraus

$$\Psi(u+\omega) = \alpha \frac{\vartheta(u+\omega+z)}{\vartheta(u+\omega)} = \alpha \frac{\vartheta(u+z)}{\vartheta(u)} e^{-2\pi i z} = e^{-2\pi i z}\Psi(u)$$

und nach (4′)

(6) $$z = -\omega x + y$$

folgt. Erweitert man (5) mit u und benutzt $-\vartheta(-u) = \vartheta(u)$, so entsteht

$$\Psi(u) = \frac{\vartheta'(0)\,\vartheta(u+z)}{\vartheta(u)\,\vartheta(z)}$$

und schließlich

(7) $$s(x, y) = e^{-2\pi i x u} \frac{\vartheta'(0)\vartheta(u+z)}{\vartheta(u)\,\vartheta(z)}.$$

Da Ψ in u und z symmetrisch gebaut ist, entsteht aus (6.7) für $0 < \xi < 1$, $0 < \eta < 1$

$$e^{2\pi i(y-\omega x)\xi}\, s(\xi, \eta) = e^{2\pi i(\eta-\omega\xi)x}\, s(x, y),$$

d. h.
$$\sum_{-}^{+}{}_{hk} \frac{e^{2\pi i[\xi h+\eta k]}}{y-\omega x+h+\omega k} = e^{2\pi i(x\eta-y\xi)} \sum_{-}^{+}{}_{hk} \frac{e^{2\pi i[xh+yk]}}{\eta-\omega\xi+h+\omega k};$$

faßt man die ω-Bestandteile in den Nennern zusammen, macht Gebrauch von der gliedweisen Differentiierbarkeit der Doppelreihen und wählt $n = 1, 2, \ldots$, so entsteht die Identität

$$(7') \qquad \sum_{-}^{+}{}_{hk} \frac{e^{2\pi i[\xi h+\eta k]}(k-x)^{n-1}}{\{h+y+\omega(k-x)\}^n} = e^{2\pi i(x\eta-y\xi)} \sum_{-}^{+}{}_{hk} \frac{e^{2\pi i[xh+yk]}(k-\xi)^{n-1}}{\{h+\eta+\omega(k-\xi)\}^n},$$

die durch Einwirkung auf $x, \ldots, \eta$ noch verallgemeinert werden kann.

Zur Formel (7) von Kronecker zurückkehrend, vollziehen wir die Übertragung der x, y-Fortsetzung auf die t-Reihen. Da wird

$$\begin{aligned} s(x, y) &= \frac{\vartheta'(0)}{\vartheta(z)}\, e^{-2\pi i x u}\, \frac{\vartheta(u+z)}{\vartheta(u)} \\ &= \frac{\vartheta'(0)}{\vartheta(z)}\, \frac{1}{2\pi i} \oint_{u+} \frac{dv}{v-u}\, e^{-2\pi i x v}\, \frac{\vartheta(v+z)}{\vartheta(v)}; \text{ aber andererseits} \\ &= \sum_{-1}^{\infty}{}_{\nu} (-u)^{\nu} t_{\nu+1}. \end{aligned}$$

Für $u = 1, 2, \ldots$ und komplexe x, y erhält man als Verallgemeinerung der Darstellung (3. 2)

$$(8) \qquad t_n = \frac{\vartheta'(0)}{\vartheta(z)}\, \frac{(-1)^{n-1}}{2\pi i} \oint_{0+} \frac{dv\, e^{-2\pi i x v}}{v^n}\, \frac{\vartheta(v+z)}{\vartheta(v)},$$

welche durch v-Schlitzung und dv-Verlegung sogar auf nicht ganze Werte von n zu übertragen ist. Ausgerechnet wird

$$(8') \qquad t_1 = -2\pi i x + \frac{\vartheta'}{\vartheta}(z)$$

$$(8'') \qquad t_2 = 2\pi^2 x^2 + 2\pi i x\, \frac{\vartheta'}{\vartheta}(z) + \left[\frac{1}{6}\frac{\vartheta'''}{\vartheta'}(0) - \frac{1}{2}\frac{\vartheta''}{\vartheta}(z)\right]$$

$$(8''') \qquad t_3 = \frac{4\pi^3 i}{3} x^3 - 2\pi^2 x^2 \frac{\vartheta'}{\vartheta}(z) + 2\pi i x \left[\frac{1}{6}\frac{\vartheta'''}{\vartheta'}(0) - \frac{1}{2}\frac{\vartheta''}{\vartheta}(z)\right] - \frac{1}{6}\left[\frac{\vartheta'''}{\vartheta'}(0)\frac{\vartheta''}{\vartheta}(z) - \frac{\vartheta'''}{\vartheta'}(z)\right]$$

$$t_4 = \frac{2\pi^4}{3} x^4 - \frac{4\pi^3 i}{3} x^3 \frac{\vartheta'}{\vartheta}(z) + \pi^2 x^2 \left[\frac{\vartheta''}{\vartheta}(z) - \frac{1}{3}\frac{\vartheta'''}{\vartheta'}(0)\right] + \frac{\pi i x}{3}\left[\frac{\vartheta'''}{\vartheta'}(z) - \frac{\vartheta'''}{\vartheta'}(0)\frac{\vartheta'}{\vartheta}(z)\right] + \frac{1}{24}\left[\frac{\vartheta^{(5)}}{5\vartheta'}(0) - \frac{2\vartheta'''^2}{3\vartheta'^2}(0) + 2\frac{\vartheta'''}{\vartheta'}(0)\frac{\vartheta''}{\vartheta}(z) - \frac{\vartheta^{(4)}}{\vartheta}(z)\right]$$

. . . . . .

Die Existenz der Grenzwerte (3) und überdies deren Größe fließt jetzt unmittelbar aus (8'. 8''); für $x \to 0$, $y \to 0$ wird

$$(3') \qquad \begin{aligned} \lim\left[\frac{1}{y-\omega x} - t_1(x, y)\right] &= 0 \\ \lim\left[\frac{2\pi i x}{y-\omega x} - t_2(x, y)\right] &= \frac{1}{3}\frac{\vartheta'''}{\vartheta'}(0). \end{aligned}$$

Aus (8) können die Periodizitätseigenschaften entnommen werden:

$$(9)\qquad t_n(x, y+1) = \frac{\vartheta'(0)}{\vartheta(z+1)} \frac{(-1)^{n-1}}{2\pi i} \oint_{0+} \frac{dv e^{-2\pi i x v}}{v^n} \frac{\vartheta(v+z+1)}{\vartheta(v)} = t_n(x, y)$$

$$t_n(x+1, y) = \frac{\vartheta'(0)}{\vartheta(z-\omega)} \frac{(-1)^{n-1}}{2\pi i} \oint_{0+} \frac{dv e^{-2\pi i x v}}{v^n} e^{-2\pi i v} \frac{\vartheta(v+z-\omega)}{\vartheta(v)} = t_n(x, y).$$

§ 9. Neubegründung der Theorie.

Die Bestätigung von Identitäten des Typus (7. 1) wird durch (8. 7. 8) zurückgebracht auf die klassische Transformationstheorie der ϑ-Reihen. Neben das bisher gebrauchte direkte Beweisverfahren der Teilbruchzerlegung und Restschätzung tritt damit als Kontrollrechnung die Abbildung auf Additionsformeln der Jacobischen ϑ-Funktion.

Die Durchführung des Gedankens soll gezeigt werden am einfachen Beispiel der Identität (6. 1):

$$s\sigma = [t_1 + \tau_1]\, s(x+\xi) - s'(x+\xi).$$

Die Abkürzungen $y - \omega x = z$, $\eta - \omega\xi = \zeta$ geben

$$s\sigma = \frac{\vartheta'^2(0)}{\vartheta(z)\,\vartheta(\zeta)} \frac{\vartheta(u+z)\,\vartheta(u+\zeta)}{\vartheta^2(u)} e^{-2\pi i(x+\xi)u}$$

$$-[t_1+\tau_1]\, s(x\,\xi) = \left[2\pi i\,(x+\xi) - \frac{\vartheta'}{\vartheta}(z)\frac{\vartheta'}{\vartheta}(\zeta)\right] \frac{\vartheta'(0)}{\vartheta(z+\zeta)} \frac{\vartheta(u+z+\zeta)}{\vartheta(u)} e^{-2\pi i(x+\xi)u}$$

$$s'(x+\xi) = \frac{\vartheta'(0)}{\vartheta(z+\zeta)} \left\{ -2\pi i\,(x+\xi) \frac{\vartheta(u+z+\zeta)}{\vartheta(u)} + \left[\frac{\vartheta(u+z+\zeta)}{\vartheta(u)}\right]' \right\} e^{-2\pi i(x+\xi)u}.$$

Die Summe der Glieder links verschwindet; rechts kürze man durch den Exponentialfaktor und beachte den Wegfall der mit $x+\xi$ behafteten Summanden. Es bleibt

$$(1)\qquad \frac{\vartheta'(0)\,\vartheta(z+\zeta)}{\vartheta(z)\,\vartheta(\zeta)} \frac{\vartheta(u+z)\,\vartheta(u+\zeta)}{\vartheta^2(u)} + \frac{d}{du}\frac{\vartheta(u+z+\zeta)}{\vartheta(u)} = \left[\frac{\vartheta'}{\vartheta}(z) + \frac{\vartheta'}{\vartheta}(\zeta)\right] \frac{\vartheta(u+z+\zeta)}{\vartheta(u)}$$

zu beweisen, und es genügt, die polaren Hauptteile dieser drei in u elliptischen Funktionen zweiter Ordnung zu vergleichen, um bis auf eine additive Konstante die Identität beider Seiten in (1) zu erkennen. Die Laurentsche Entwickelung bei $u = 0$ beginnt mit $\frac{\vartheta(z+\zeta)}{u^2\,\vartheta'(0)} + \vartheta(z+\zeta)\frac{d}{du}\left[\frac{1}{\vartheta(u)}\right]$, so daß die Pole 2. Ordnung sich links wegheben; die Residuen beiderseits lauten $\left[\frac{\vartheta'}{\vartheta}(z) + \frac{\vartheta'}{\vartheta}(\zeta)\right]\frac{\vartheta(z+\zeta)}{\vartheta(0)}$, während die Ausrechnung der Absolutglieder umgangen werden kann, indem etwa bei $u = -z$ weiter operiert wird.

Eine leichte Abänderung des eingeschlagenen Weges führt über das schon von Gauß benutzte Transformationsprinzip der ϑ-Funktionen zweiter Ordnung: Auf funktionentheoretischem Wege zeigt man mit $\frac{\partial a}{\partial u} = \frac{\partial b}{\partial u} = 0$ zunächst das Bestehen von $a\vartheta(u+z)\vartheta(u+\zeta) + b\{\vartheta'(u+z+\zeta)\vartheta u - \vartheta' u\vartheta(u+z+\zeta)\} = \vartheta(u)\vartheta(u+z+\zeta)$ und bestimmt dann vermöge $\vartheta(u) = -\vartheta(-u)$ die Koeffizienten a, b.

§ 10. Das Siegelsche Prinzip.

Wie die einfach erstreckten g-Reihen von der Erklärung (1. 6) aus in die elementare Darstellung (1. 10) als Bernoullische Polynome verwandelt werden konnten, so

ließen die in transzendenter Weise durch Doppelreihen eingeführten Funktionen $t_n(x, y)$ die „geschlossene" Darstellung (8. 8) zu, nach welcher mit $y - \omega x = z$ und nur von z und ω abhängenden Θ

$$(1) \qquad t_n(x, y) = \sum_0^n \Theta_{n,\nu}(2\pi i x)^{n-\nu} \qquad \text{für } n = 0, 1, \ldots$$

gefunden wurde. Die Größen $\Theta_{n,\nu}$ sind rational zusammengesetzt aus $\vartheta, \vartheta', \ldots, \vartheta^{(n)}$ mit dem Argument 0 oder z und rationalen Zahlenkoeffizienten.

Die früher behandelten t-Rekursionen finden jetzt ihr Gegenstück in entsprechenden ϑ-Beziehungen, und darin zeigt sich wieder die in § 3 schon angedeutete Elementarisierung der elliptischen Funktionen; es unterliegen ja die linken Seiten (8. 8′. 8″ . . .) denselben formalen Bindungen wie die Polynome $g_n(x)$, denen die entsprechenden rechten Seiten mit $\omega \to +i\infty$ zustreben.

In (1. 6′) war ein differentieller Zusammenhang der g-Reihen gegeben, der zusammen mit gewissen Anfangswerten, den Bernoullischen Zahlen, zur Bestimmung der $g_n(x)$ ausreichte, nämlich

$$\frac{1}{z\pi i}\frac{d}{dx} g_{n+1}(x) = g_n(x).$$

Analog suchen wir durch partielle Ableitungen nach x, y die t_n ineinander zu verschieben. Schreiben wir zur Abkürzung das Symbol

$$(2) \qquad \frac{1}{z\pi i}\left\{\frac{\partial}{\partial x} + \omega \frac{\partial}{\partial y}\right\} = \mathfrak{D},$$

so wird nach (3. 2) für $n = 0, 1, \ldots$

$$(3) \qquad \mathfrak{D} t_{n+1}(x, y) = t_n(x, y).$$

Das Symbol (2) genügt seiner Linearität wegen der Regel von Leibniz: $\mathfrak{D}(\varphi\psi) = \varphi\,\mathfrak{D}\psi + \psi\,\mathfrak{D}\varphi$ und den übrigen Differentiationsregeln wie $\mathfrak{D}(\varphi + \psi) = \mathfrak{D}\varphi + \mathfrak{D}\psi$. Insbesondere aber gilt

$$\mathfrak{D}(y - \omega x) = 0,$$

und daher auch

$$\mathfrak{D}\{(\varphi(y - \omega x)\} = 0,$$

so daß z. B. in (8′)

$$\mathfrak{D}\left\{\frac{\vartheta'}{\vartheta}(z)\right\} = 0$$

wird. Trägt man nun (3) in (1) ein und berücksichtigt die Vernichtung der jeweiligen Absolutglieder durch (2), so gewinnt man die zur Tafel (8. 8′ . . .) praktische Hilfsformel

$$(n - \nu)\,\Theta_{n+1,\nu} = 2\pi i\,\Theta_{n,\nu} \qquad \text{für} \quad \begin{cases} \nu = 0, \ldots, n \\ n = 0, 1, \ldots \end{cases};$$

sie befähigt uns, die n Polynome (8. 8′. 8″. . . .) anzuschreiben, sobald nur deren Absolutglieder bekannt sind, d. h. die „verallgemeinerten Bernoullischen Zahlen"

$$t_n(0, y) = \frac{\vartheta'(0)}{\vartheta(y)} \frac{(-1)^{n-1}}{z\pi i} \oint_{0+} \frac{dv}{v^n} \frac{\vartheta(v + y)}{\vartheta(v)}.$$

Als Probe finden wir aus (8. 8″) wieder, und zwar schon nach endlich vielen Schritten, $\mathfrak{D} t_4 = t_3$; während hier im Gebiet absoluter und gleichmäßiger Konvergenz die Vertauschbarkeit $\mathfrak{D}\Sigma = \Sigma\mathfrak{D}$ evident war, müßte derselbe Prozeß für kleinere Werte von n durch den Nachweis der Summierbarkeit von (3. 2), etwa nach arithmetischen Mitteln, erst ge-

rechtfertigt werden. Die zugehörige Rechnung wurde eingespart, weil der betreffende Grenzübergang im Begriff der ϑ-Funktion schon enthalten ist.

Die in § 3 gesondert eingeführte Funktion $t_0 = -1$ bleibt in der Tat im Einklang mit (3) und (8. 8′), denn man hat

$$(3') \qquad \mathfrak{D}t_1 = \left\{\frac{\partial}{\partial x} + \omega \frac{\partial}{\partial y}\right\}\left[-x + \frac{1}{z\pi i}\frac{\vartheta'}{\vartheta}(z)\right] = -1.$$

Der Übergang von (6. 1) zu (9. 1) kann betrachtet werden als Entfernung von x, y zugunsten von $y - \omega x = z$; daß zuletzt unsere Aussagen sich gerade in dieser Variablenkombination formulieren ließen, legt es nahe, zwischen je zweien der Gleichungen (8. 8) etwa x zu entfernen. Damit stößt man auf t-Polynome, die sich rational ausdrücken lassen durch ϑ-Ableitungen. Aus (8. 8′. 8″) kommen wir auf eine t-Verbindung, welche sich schon in (6. 2, 8. 2) bemerklich machte; man addiere

$$t_1^2 = -4\pi^2 x^2 - 4\pi i x \frac{\vartheta'}{\vartheta}(z) + \frac{\vartheta'^2}{\vartheta^2}(z)$$

$$2t_2 = 4\pi^2 x^2 + 4\pi i x \frac{\partial'}{\vartheta}(z) + \left[\frac{1}{3}\frac{\vartheta'''}{\vartheta'}(0) - \frac{\vartheta''}{\vartheta}(z)\right], \qquad \text{um}$$

$$t_1^2 + 2t_2 = \frac{1}{3}\frac{\vartheta'''}{\vartheta'}(0) - \frac{d^2}{dz^2}\log\vartheta(z) \qquad \text{zu finden, was nach Weierstraß}$$

$$(5) \qquad = \wp(z) \qquad \text{zu setzen ist}$$

und den Aufbau einer einfachen elliptischen Funktion durch t-Polynome leistet. Anstatt nun explizite aus (8. 8‴) die Entfernung von x zu erzwingen, benutze man eleganter die Differentialbeziehungen (3. 3′. 4), welche in der Tat einerseits $\mathfrak{D}(t_1^2 + 2t_2) = 2t_1 t_0 + 2t_1 = 2t_1(t_0 + 1)$ aus (5) folgern, andrerseits aber $-\mathfrak{D}\wp(z) = 0$ einsehen lassen, und daher eine durchsichtige konstruktive Vorschrift an die Hand geben, doppeltperiodische t-Polynome entsprechend (5) herzustellen. Mit konstanten Zahlen α, β setzen wir zu deren Bestimmung an

$$\mathfrak{D}\{t_1^3 + \alpha t_1 t_2 + \beta t_3\} = 0,$$

oder wegen (3. 3′)

$$(6) \qquad 0 = 3t_1^2 t_0 + \alpha(t_1^2 + t_0 t_2) + \beta t_2 = (\alpha - 3)\, t_1^2 + (\beta - \alpha)\, t_2.$$

Nach (8. 8′) bleibt für jedes x, y zwar t_2 beschränkt, nicht aber t_1; somit zerfällt (6) in zwei unabhängige Bestandteile, und man sieht, daß

$$(5') \qquad t_1^3 + 3t_1 t_2 + 3t_3 = Q(z)$$

eine meromorphe Funktion ist mit

$$\lim_{z\to 0} z^3\, Q(z) = -1.$$

Insbesondere also verschwindet der Ausdruck (5′) nicht identisch in z, und man bemerkt die algebraische Unabhängigkeit von t_1, t_2, so daß die durch (7. 5) gewonnene zweigliedrige algebraische Basis für alle t_ν auch wirklich die kleinstmögliche ist — im Gegensatz zum elementaren Grenzfall Bernoullischer Polynome.

Der Bereich $0 < x < 1,\ 0 < y < 1$ bestimmt ein Parallelogramm der z-Ebene, in dessen Ecken die Pole von $Q(z)$ liegen; im Innern und längs der Randlinien aber bleibt $Q(z)$ regulär. Vermöge (8. 9) vollziehe man nun die analytische Fortsetzung durch die $y - \omega x = z$-Ebene hindurch; so findet man für die rechte Seite von (5′) die doppelte Periodizität

$$Q(z) = Q(z+1) = Q(z+\omega),$$

die den einzelnen t-Summanden links in (5′) nicht zukommt. Auf neue Weise ist somit $Q(z)$ als elliptische Funktion erkannt, und durch Vergleich mit (8. 8‴) erhält man neben

$$\wp(z) = t_1^2 + 2\,t_2$$

noch deren Ableitung

$$\wp'(z) = -\,2\,t_1^3 - 6\,t_1 t_2 - 6\,t_3, \tag{5″}$$

so daß mittels (5.5″) eine jede in z elliptische Funktion als Quotient zweier t-Polynome dargestellt werden kann. In bekannter Beleuchtung aber erscheint jetzt die algebraische Bindung (7.5) zwischen t_1, t_2, t_3: Sie ist nichts anderes als die Differentialgleichung der Weierstraßschen $\wp$-Funktion in der Gestalt

$$[-\,2t_1^3 - 6t_1t_2 - 6t_3]^2 = 4[t_1^2 + 2t_2]^3 + 60t_4(0)[t_1^2 + 2t_2] - 140\,t_6(0),$$

die ihrerseits durch (7. 5) aufs neue bestätigt ist.

Durch Anwendung von (8. 8) kann (8. 3′) beliebig verschärft werden, so daß t_1, t_2, t_3 für $y - \omega x \to 0$ durch rationale Funktionen von x und y in jeder gewünschten Genauigkeit approximiert werden können. Nach (5. 5″, 7. 5) kann überdies jedes t-Polynom eindeutig auf die Gestalt gebracht werden:

$$P(t_1, t_2, t_3) = P_1(t_1, t_2) + t_3\,P_2(t_1, t_2). \tag{6′}$$

Daher kann in endlich vielen Schritten entschieden werden, ob die rechte Seite in (6′) polar unendlich wird von wenigstens erster Ordnung; wenn ja, so kann P nicht identisch in x, y verschwinden, d. h. es gilt

$$P \not\equiv 0. \tag{6″}$$

Sei

$$P(t_1, t_2, t_3) = f(x, y), \tag{7}$$

so folgt aus

$$f(x, y) = f(x + 1, y) = f(x, y + 1), \tag{7′}$$

falls durch (2)

$$\mathfrak{D}\,f(x, y) = 0$$

herbeigeführt wird, notwendig

$$f(x, y) = \varphi(y - \omega x) = \varphi(z);$$

also wird nach (7′) die Funktion $\varphi(z)$ doppeltperiodisch, diese bleibt nach (7) überall im endlichen meromorph, ist also eine elliptische Funktion, und wegen (6″) entartet diese nicht zu einer Konstanten.

Die Konstruktion elliptischer Funktionen aus den t-Reihen ist damit zusammengedrängt in das folgende weittragende

Prinzip: *Ein t-Polynom P genüge der Bedingung $\mathfrak{D}P = 0$; verschwindet diese z-Funktion nicht identisch, so ist sie elliptisch.*

Diese Grundlage, das „Siegelsche Prinzip", soll jetzt in Sonderfällen verfolgt werden.

§ 11. Beispiele.

Die Darstellungen (10. 5. 5″) für elliptische Funktionen mit einem Pol der Ordnung zwei oder drei im Fundamentalbereich betrafen die im Sinn Weierstraßens einfachsten doppeltperiodischen Funktionen. In der Darstellung durch t-Funktionen kommt dies zur Geltung, insofern hier eine lineare Kombination der Grenzformeln (8. 1. 2) vorliegt; und es waren die zugrunde liegenden Rekursionen (5. 1, 6. 2′) diejenigen niedersten Grades in $t_1(x)$, $\tau_1(\xi)$.

Die vom Standpunkt Jacobis elementaren Funktionen *sn*, *cn*, *dn* mit je nur einem

Pol im halben Periodenparallelogramm sind innerhalb der gegenwärtigen Theorie aber auch bevorzugt, sobald wir das Argumentpaar x, y durch additive Zusätze beweglich halten; alsdann sind sie in geschlossener Form durch die Funktion t_1 allein darstellbar. Schreibt man zur Abkürzung, wie in (3. 3″) vorgeschlagen, $t_1(x+\xi, y+\eta) = t_1(x+\xi)$, so zeigt sich für komplexe $x, y, \xi_1, \ldots, \eta_2$

$$\mathfrak{D}\{t_1(x+\xi_1) - t_1(x+\xi_2)\} = t_0 - t_0 = 0;$$

also ist

$$t_1(x+\xi_1) - t_1(x+\xi_2) = \varphi(y-\omega x)$$

doppeltperiodisch und stellt für $\xi_1 \neq \xi_2$ eine nicht triviale elliptische Funktion dar. Allgemeiner gilt dies mit $n = 2, 3, \ldots,$ $\nu = 1, \ldots, n$, $\frac{\partial \alpha_\nu}{\partial x} = \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial y} = 0$ und $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 0$ für die lineare Bildung

$$(1)\quad \alpha_1 t_1(x+\xi_1) + \alpha_2 t_1(x+\xi_2) + \cdots + \alpha_n t_1(x+\xi_n) = \Psi(y-\omega x) = \Psi(z),$$

wo die $2n$ komplexen Zahlen $\xi_\varkappa, \eta_\lambda$ nur der einen Bedingung unterliegen:

$$\sum_{\varkappa\lambda}^{\varkappa\neq\lambda} (\xi_\varkappa - \xi_\lambda)^2 + (\eta_\varkappa - \eta_\lambda)^2 > 0.$$

Die Darstellung (1) läßt nur n Pole erster Ordnung zu und setzt deren Lage $z_\nu = \omega\xi_\nu - \eta_\nu$ in Evidenz; wegen (8. 3) sind durch die α_ν die zugehörigen Residuen gegeben. In gleicher Weise, durch Abänderung der Argumente, wollen wir (10. 5. 5″) verallgemeinern. Es ist einerseits

$$\mathfrak{D}\{t_1(x+\xi_1)\, t_1(x+\xi_2)\} = -\, t_1(x+\xi_1) - t_1(x+\xi_2),$$

andrerseits

$$\mathfrak{D}\{t_2(x+\xi_1) + t_2(x+\xi_2)\} = t_1(x+\xi_1) + t_1(x+\xi_2).$$

Nach Addition und Integration zeigt das Siegelsche Prinzip, daß

$$(2)\qquad t_1(x+\xi_1)\, t_1(x+\xi_2) + t_2(x+\xi_1) + t_2(x+\xi_2) = \chi(z)$$

eine elliptische Funktion ist, die vier freie reelle Parameter $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$ enthält. Derselbe Vorgang der differentiellen Ergänzung eines t_1-Produktes liefert dreifach polar

$$\begin{aligned}(2')\quad & t_1(x+\xi_1)\, t_1(x+\xi_2)\, t_1(x+\xi_3) \\ & + [t_1(x+\xi_1)\, t_2(x+\xi_2) + t_1(x+\xi_2)\, t_2(x+\xi_3)\, t_1(x+\xi_3)\, t_2(x+\xi)_1] \\ & + \{t_3(x+\xi_1) + t_3(x+\xi_2) + t_3(x+\xi_3)\} = \pi(z)\end{aligned}$$

in Verallgemeinerung von $\wp'(z)$.

Der Vergleich von (2) mit (1) im Falle $n = 2$ gibt für $\xi_1 \neq \xi_2$, $\eta_1 \neq \eta_2$ zwei Darstellungen derselben Funktion, nämlich

$$\begin{aligned}(3)\quad & t_1(x+\xi_1)\, t_1(x+\xi_2) - t_2(x+\xi_1) - t_2(x+\xi_2) \\ & + t_1(\xi_1-\xi_2)[t_1(x+\xi_1) - t_1(x+\xi_2)] = c,\end{aligned}$$

und diese von x unabhängige Zahl c kann bestimmt werden durch Kenntnis einer Nullstelle von t_1. Dazu setze man in (3. 2″) $\xi = x$, $\eta = y$; mit den Grenzwerten (8. 3′) und der Periodeneigenschaft (8. 9) folgt dann

$$(4)\qquad t_1(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = 0,$$

analog zu

$$g_1(\tfrac{1}{2}) = 0$$

in (1. 10), und es bestimmt sich jetzt

$$c = -\, t_2(\tfrac{1}{2}) - t_2(\tfrac{1}{2} + \xi_2 - \xi_1) + t_1(\xi_2 - \xi_1)\, t_1(\tfrac{1}{2} + \xi_2 - \xi_1),$$

so daß auch die linke Seite in (3) nicht von ξ_1 und ξ_2 abhängt, sondern nur von deren Differenz.

Ubrigens liegen die Nullstellen der t-Funktionen ungeraden Zeigers ganz entsprechend ihren Bernoullischen Grenzpolynomen; es ist

$$t_1(\tfrac{1}{2}, 0) = t_1(0, \tfrac{1}{2}) = 0,$$

und aus (6. 4) folgt

$$t_3(\tfrac{1}{2}, 0) = t_3(0, \tfrac{1}{2}) = t_3(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = 0.$$

Schließlich sei das Siegelsche Prinzip noch auf s-Funktionen verallgemeinert. Mit reellen v, w sei $u = v + \omega w$, und man setze für $\nu = 1, 2, \ldots$; $u \not\equiv 0 \pmod{1, \omega}$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{-n}^{+n}{}' \frac{e^{2\pi i[x(h+v)+y(k+w)]}}{\{h + v + \omega(k + w)^\nu} = \sigma_\nu, \qquad \sigma_0 = 0;$$

dann gilt

$$\mathfrak{D}\sigma_{\nu+1} = \sigma_\nu \qquad \text{für } \nu = 0, 1, \ldots,$$

und daher ist

(5) $\dfrac{d^\nu}{dv^\nu}\sigma_1$ meromorphe Funktion von $y - \omega x$; ebenso $\dfrac{d^\nu}{dw^\nu}\sigma_1$.

Schreibt man statt (3. 3) ausführlich $s(u; x, y)$, so stellt infolge des Siegelschen Prinzips oder der Darstellung (8. 7) der Ausdruck

(5′) $$\frac{d^\nu}{du^\nu}\prod_0^\varrho{}_j\, s(p_j u; x, y)\big|_{u=0} \text{ mit } \varrho = 2, 3, \ldots$$

für komplexe p_j der Summe 0: $\sum_0^\varrho{}_j p_j = 0$, immer eine elliptische Funktion von $y - \omega x$ dar; z. B. (10. 5. 5.″).

§ 12. Invarianten.

Die Funktion (11. 5′) war in $y - \omega x = z$ elliptisch deshalb, weil zur Bedingung (11. 5) der Meromorphie noch vermöge $\sum_0^\varrho{}_j p_j = 0$ der Wegfall störender Exponentialfaktoren aus (8. 7) erzielt wurde. Nunmehr soll die in (11. 5) eingehende nicht elliptische Funktion σ_1 noch genauer betrachtet werden. Nach (3. 2. 3) erhalten wir für kleine Werte von $|u|$

(1) $$e^{2\pi i x u} s = \sum_0^\infty{}_\varkappa \frac{(2\pi i x u)^\varkappa}{\varkappa!} \sum_{-1}^\infty{}_\lambda (-u)^\lambda t_{\lambda+1},$$

nach Potenzen von u geordnet

$$= -\sum_{-1}^\infty{}_\nu (-u)^\nu \sum_0^{\nu+1}{}_\varkappa \frac{\left(\frac{2\pi x}{i}\right)^\varkappa}{\varkappa!} t_{\nu-\varkappa+1}.$$

Von einer Veränderlichen nur abhängig ist also

(2) $$\sum_0^{\nu+1}{}_\varkappa \frac{\left(\frac{2\pi x}{i}\right)^\varkappa}{\varkappa!} t_{\nu-\varkappa+1} = \Psi(z).$$

Erweitert man (1) durch e^{-vu}, so verallgemeinert sich (2) zu

(2′) $$\sum_0^{\nu+1}{}_\varkappa \frac{\left(v + \frac{2\pi}{i} x\right)^\varkappa}{\varkappa!} t_{\nu-\varkappa+1}(x, y) = \Psi_{\nu+1}(v, z),$$

d. h. zu einem Polynom $(\nu+1)$-ten Grades in v, welches in z meromorph bleibt, beiläufig mit Polen höchstens der Ordnung $\nu+1$.

Aus den Koeffizienten $c_\varkappa$ eines Polynoms $(\nu+1)$-ten Grades in einer Unbestimmten w:

$$\sum_0^{\nu+1} c_\varkappa w^\varkappa = P_{\nu+1}(w) \tag{3}$$

können homogene Formen des Grades m $(=1, 2, \ldots)$ gebildet werden, etwa

$$f_m(c_0, \ldots, c_{\nu+1}). \tag{4}$$

Unterliegt hier jedes auftretende Monom $c_{\varkappa_1} c_{\varkappa_2} c_{k_3} \cdots c_{\varkappa_m}$ der Einschränkung, daß die Summe seiner Zeiger konstant bleibt:

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 + \ldots + \varkappa_m = g,$$

so schreibt man der ganzen rationalen Form f_m in (4) das „Gewicht" g zu und nennt $f_m = f_{m,g}$ „isobar".

Unterwirft man in (3) die Unbestimmte w einer linear gebrochenen Transformation, so bleibt $w^{\nu+1} P_{\nu+1}$ ein Polynom, dessen Koeffizienten $C_0, \ldots, C_{\nu+1}$ allgemein zu reden gegenüber den Ausgangskoeffizienten $c_0, \ldots, c_{\nu+1}$ sich verändern werden.

Diejenigen isobaren Formen f_m, für welche mit $\dfrac{\partial k}{\partial c_0} = \cdots = \dfrac{\partial k}{\partial c_{\nu+1}}$ aber

$$f_m(c_0, \ldots, c_{\nu+1}) = k f_m(C_0, \ldots, C_m) \tag{5}$$

gilt, pflegt man projektive Invarianten von $P_{\nu+1}$ zu nennen. Der Übergang von (2) zu (2′) legt uns nahe, die allgemeinere Klasse isobarer Formen $\varphi_m(c_0, \ldots, c_{\nu+1})$ zu untersuchen, welche nicht wie $f_m(c_0, \ldots, c_{\nu+1})$ invariant bleiben gegen Einwirkung jeder linearen Transformation, sondern für feste α nur gegen die spezielle ganze Substitution $w = w^* + \alpha$. Es ist dann unter den φ_m eine jede f_m sicher vorzufinden; da erstere nur gegen einen Teil aller möglichen linearen Transformationen invariant bleiben, mögen sie „Halbinvarianten" φ_m genannt werden. Die Konstante k in (5) nimmt dabei den Wert $k=1$ an.

Identifiziert man (2′) und (3) so können auf dieser Grundlage gewisse Formen in den t einerseits als Halbinvarianten gegen Variation von v, andererseits als analytische Funktionen in z erkannt werden. Nach Siegels Prinzip sind sie dann elliptisch, und man erhält somit einen invariantentheoretischen Zugang zur Theorie der elliptischen Funktionen. Neben (2′) stellen wir also

$$\Psi_{\nu+1}(v, z) = \sum_0^{\nu+1} \frac{\left[v + \dfrac{2\pi\alpha}{i} + \dfrac{2\pi x}{i}\right]^\varkappa}{\varkappa!} t_{\nu-\varkappa+1}(x+\alpha,\ y+\omega\alpha), \tag{2″}$$

und setzen $v + \dfrac{2\pi x}{i} = w$. Zu den beiden Darstellungen (2′. 2″) von Ψ suchen wir eine Halbinvariante $\varphi\{t_1, t_2, \ldots, t_{\nu+1}\} = \varphi\{t_1(x,y), \ldots, t_{\nu+1}(x,y)\}$, welche andererseits $= \varphi\{t_1(x+\alpha, y+\omega\alpha), \ldots, t_{\nu+1}(x+\alpha, y+\omega\alpha)\}$ wird. Jede Funktion, für die $f(x,y) = f(x+\alpha, y+\omega\alpha)$ gilt, ist immer $= \Psi(y-\omega x)$, d. h. nur von einem Argument abhängend $= \Psi(z)$.

Weil in den t isobar, verschwindet überdies φ nicht identisch in z, und so erscheint der gewünschte Zusammenhang:

In der Unbestimmten w bilde man für $\nu = 1, 2, \ldots$ die Polynomfolge

$$P_{\nu+1}(w) = \sum_0^{\nu+1} \frac{w^\varkappa}{\varkappa!} t_{\nu-\varkappa+1}\,. \tag{6}$$

Für $m = 2, \ldots, \nu + 1$ sei $\varphi_m(t_0, t_1, \ldots, t_{\nu+1})$ jeweils eine gegen lineare w-Transformation halbinvariante Form m-ten Grades in den t. Dann ist φ_m in z elliptisch.

Einen zweiten Beweis dieses Invariantensatzes erhält man vermöge partieller Differentialgleichungen; die Kennzeichnung halbinvarianter isobarer Formen φ gelingt nämlich durch den sogenannten „Ω-Prozeß", d. h. durch Differentialoperationen, die gerade jedes φ vernichten.

Die Koeffizienten des Ausgangspolynoms P pflegen durch Binomialkoeffizienten normiert zu werden; hält man sich entgegen der üblichen Schreibweise an die in (6) eingeführte Koeffizientennormierung, so vereinfacht sich der oben erwähnte differentielle Prozeß ein wenig und lautet

$$\Omega = \sum_0^{\nu} \varkappa\, t_\varkappa \frac{\partial}{\partial t_{\varkappa+1}}.$$

Gleichwertig zu $\Omega\{\varphi\} = 0$ findet man $\mathfrak{D}\{\varphi\} = 0$, womit nach früheren Ergebnissen der Beweis erbracht ist.

An (2′.3) anknüpfend kann man auch einfach so schließen: Für $w = \frac{2\pi x}{i}$ ist das Polynom $P_{\nu+1}(w + t_1)$ mit seinem Argument eine analytische Funktion von z; entwickelt man nach w, so vererbt sich die Eigenschaft, von z allein abzuhängen, auf jeden Koeffizienten, nämlich eben auf die Halbinvarianten. Z. B.

$$\text{für } P_2(w) = t_2 + w t_1 - \frac{w^2}{2} \quad \text{ist} \quad -2P_2(w + t_1) = w^2 - [t_1^2 + 2t_2]$$

$$\text{für } P_3(w) = t_3 + w t_2 + \frac{w^2}{2} t_1 - \frac{w^3}{6} \text{ ist } -6P_3(w + t_1) = w^3 - 3w[t_1^2 + 2t_2] - 2[t_1^3 + 3t_1 t_2 + 3t_3];$$

allgemein findet man für $m = 2, 3, \ldots, \nu + 1$, daß $\varphi_m(t_1, \ldots, t_m) = \mu P_m(t_1)$, wo μ eine von den t unabhängige Zahl bedeutet.

Die so eingeführten Halbinvarianten $P_m(t_1)$ des Polynoms $P_{\nu+1}(w)$ sind uns Hilfsmittel zur Bestimmung der projektiven Invarianten selbst; mit $\nu = 3$ betrachte man speziell

$$P_4(w) = \sum_0^4 \frac{w^\varkappa}{\varkappa!} t_{4-\varkappa}. \tag{7}$$

Aus deren Halbinvarianten $\left\{ \begin{array}{l} P_0(t_1) = -1 \\ P_2(t_1) = \frac{1}{2}[t_1^2 + 2t_2] \\ P_3(t_1) = \frac{1}{3}[t_1^3 + 3t_1 t_2 + 3t_3] \\ P_4(t_1) = \frac{1}{8}[t_1^4 + 4t_1^2 t_2 + 8t_1 t_3 + 8t_4] \end{array} \right\}$ erhält man rational zwei unabhängige Invarianten von (7). Durch anhängende Zeiger sei deren Grad und Gewicht festgelegt; sie lauten

$$j_{2,4} = P_2^2 + 2P_0 P_4$$
$$j_{3,6} = 2P_2^3 + 9P_0 P_3^2 + 12 P_0 P_2 P_4,$$

wenn je das allein eingehende Argument t_1 unterdrückt wird. Als z-Funktion ist $j_{3,6}$ elliptisch, $j_{2,4}$ aber zudem beschränkt und daher konstant.

Frankfurt a. M., den 16. 6. 29.

Eingegangen 21. Juni 1929.

Über die Konvexitäts- und Konkavitätsstellen auf Jordankurven.

Von *B. Kaufmann* in Heidelberg.

Inhaltsverzeichnis.

Seite
Einleitung. 112
§ 1. Die Bestimmung der Stützstrecken. Hilfsbetrachtungen 113
§ 2. Anwendungen auf die Theorie konvexer Figuren 116
§ 3. Die Verteilung der Stützstrecken 118
§ 4. Kurven ohne konvexe Teilbögen 122
§ 5. Die Gestalt der Kurve in der Umgebung einer singulären Stelle 124

Einleitung.

Nach Herrn H. Tietze [1]) und Leja und Wilkocz [2]) besitzt ein ebener, nicht konvexer Bereich mindestens eine Konkavitätsstelle, während das Fehlen der (nicht auf einer offenen Begrenzungsstrecke liegenden) Konkavitätsstellen (nach Herrn Tietze) für die konvexen Figuren charakteristisch ist. — Es ist naheliegend, nach der Verteilung der Stützstrecken bzw. der Konvexitäts- und Konkavitätsstellen bei allgemeineren nicht konvexen Randlinien zu fragen. In der vorliegenden Abhandlung untersuchen wir in dieser Richtung insbesondere die geschlossenen Jordankurven.

Die Stützstrecken bilden ein neues Hilfsmittel für eine weitgehende geometrische Untersuchung der Gestalt der Jordankurven allgemeinster Art ohne Voraussetzung der Differentierbarkeit, an welche meistens die geometrische Diskussion der reellen Kurven mit Hilfe der Tangenten und Halbtangenten geknüpft ist.

Im § 1 beschäftigen wir uns zunächst mit der Bestimmung der Stützstrecken in beliebig kleiner Umgebung eines Kurvenpunktes. Die Stellen mit Stützstrecken, die wir Konvexitäts- und Konkavitätspunkte nennen, können als Extrema der Kurve „im Kleinen“ in bezug auf gewisse (nicht im voraus festgesetzte) Richtungen aufgefaßt werden und liegen auf der Kurve überall dicht. — Für das Weitere ist der Hilfssatz wesentlich, wonach die Gesamtheit aller Stütz- und Grenzstützstrecken fester Länge (vgl. Ziff. 3) der Kurve abgeschlossen ist. Eine Anwendung dieses Hilfssatzes bildet unter anderem auch die Verschärfung eines Satzes des Herrn Tietze über konvexe Figuren (§ 2).

Im § 3 untersuchen wir die Verteilung der Stützstrecken in der Umgebung singulärer (nicht auf offenen konvexen Bögen liegender) Kurvenpunkte. Wir beweisen die stückweise gleichmäßige Abnahme der Größe der Stützstrecken und betrachten die Ver-

[1]) Über konvexe Figuren, Journ. f. r. u. ang. Math. **158** (1927), S. 168—172. Bemerkungen über konvexe und nicht konvexe Figuren, ebenda **160** (1929), S. 67—69. Vgl. auch die unter [8]) zitierte Note desselben Verfassers.

[2]) Sur une proprieté des domaines concaves, Annales le la Soc. polon. de math. **2** (1923).

teilung paralleler Stützstrecken in solchen Umgebungen. Besonders ausgeprägt ist der singuläre Charakter der Kurvenpunkte ohne Stützstrecken.

Im § 4 betrachten wir die Kurven ohne konvexe Teilbögen. Auf diesen Kurven liegen nicht nur die Konvexitäts- und Konkavitätsstellen überall dicht, sondern auch solche Kurvenpunkte, die weder Konvexitäts- noch Konkavitätsstellen sind. Es ist besonders erwähnenswert, daß die Gesamtheit aller Konvexitäts- und Konkavitätsstellen auf der Kurve abzählbar sein kann und daß dies bei einer sehr allgemeinen Kurvenart, nämlich bei Kurven, die durch Kondensation linearer Dreieckketten erzeugt werden, immer der Fall ist.

Im § 5 betrachten wir die Gestalt der Kurven in der Umgebung singulärer Kurvenpunkte.

§ 1. Die Bestimmung der Stützstrecken. Hilfsbetrachtungen.

1. *Stützstrecken und einschließende Kurven.* Eine Randstelle P eines beliebigen ebenen Bereiches nennen wir eine *Konvexitätsstelle* des Bereiches, falls eine abgeschlossene Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt in P (und einem beliebigen Radius) durch irgendeinen ihrer Durchmesser T so zerlegt wird, daß in einer abgeschlossenen Kreisscheibenhälfte $\mathfrak{K}^0$ (von T selbst abgesehen) keine Punkte des abgeschlossenen Bereiches liegen. Wird hingegen eine solche Kreisscheibe durch irgendeinen Durchmesser T so zerlegt, daß (von T abgesehen) eine abgeschlossene Halbkreisscheibe $\mathfrak{K}^0$ nur innere Punkte von $\mathfrak{B}$ enthält, so nennen wir P eine *Konkavitätsstelle* des Bereiches. Den Durchmesser T der Kreisscheibe nennen wir im ersteren Fall eine *äußere*, im zweiten Fall eine *innere Stützstrecke* des Bereiches an der Stelle P. Die Halbkreisscheibe nennen wir entsprechend einen *äußeren* bzw. einen *inneren Stützbereich* an der Stelle P.

Eine sehr nützliche hinreichende Bedingung für die Existenz und Bestimmung der Stützstrecken in einer beliebig kleinen Umgebung eines Randpunktes gewinnt man leicht aus den Betrachtungen des Herrn Tietze [3]), falls man nicht nach Stellen mit Stützstrecken bestimmter Art (äußeren oder inneren), sondern nach Stellen mit Stützstrecken schlechthin fragt. Diese Bedingung fassen wir für Berandungen beliebiger Gebiete folgendermaßen.

R sei ein beliebiger Punkt der Berandung S eines ebenen Gebietes $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{U}(R)$ eine beliebig kleine Umgebung von R. H sei eine Jordankurve innerhalb $\mathfrak{U}(R)$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. H enthält einen geradlinigen Teil $\overline{AB}$, dessen Endpunkte entweder im abgeschlossenen Gebiet $\mathfrak{B}^0$ [4]) oder im abgeschlossenen Komplementärgebiet $\mathfrak{B}^{*0}$ von $\mathfrak{B}$ liegen.

2. Der zu der abgeschlossenen Strecke $\overline{AB}^0$ komplementäre Kurvenbogen $L_{A,B} < H$ verläuft entweder ganz innerhalb $\mathfrak{B}$ oder ganz außerhalb $\mathfrak{B}^0$.

3. Verläuft der Bogen $L_{A,B}$ ganz innerhalb $\mathfrak{B}$, so trifft die (nicht abgeschlossene) Strecke $\overline{AB}$ Punkte des abgeschlossenen Komplementärgebietes $\mathfrak{B}^{*0}$, verläuft $L_{A,B}$ ganz außerhalb $\mathfrak{B}^0$, so trifft die Strecke $\overline{AB}$ Punkte von $\mathfrak{B}^0$.

Die letzte Bedingung besagt, daß innerhalb des von H begrenzten beschränkten Bereiches oder auf dem nichtabgeschlossenen geradlinigen Teil $\overline{AB}$ von H Punkte von S liegen müssen.

---

[3]) Vgl. die unter [1]) verzeichneten Noten.

[4]) Die abgeschlossene Hülle einer beliebigen Menge M bezeichnen wir immer mit M^0. Entsprechend bezeichnen wir immer mit $J^0_{A,B}$ einen abgeschlossenen Jordanbogen $J_{A,B} + A + B$ mit den Endpunkten A und B.

Die Jordankurve

$$H = \overline{AB}^0 + L_{A,B}$$

nennen wir eine *einschließende* Kurve (in bezug auf Randpunkte des Bereiches $\mathfrak{B}$). Je nachdem der Bogen $J_{A,B}$ ganz außerhalb oder ganz innerhalb $\mathfrak{B}$ verläuft nennen wir die einschließende Kurve eine *innere* oder eine *äußere*.

Die Existenz einer einschließenden Kurve innerhalb $\mathfrak{U}(R)$ ermöglicht die Konstruktion einer Stützstrecke innerhalb des von der einschließenden Kurve H begrenzten beschränkten Bereiches $\mathfrak{H} < \mathfrak{U}(R)$.

Es sei g die Gerade, die durch Verlängerung der Strecke $\overline{AB}$ entsteht. Wir bilden den Durchschnitt $S \cdot \mathfrak{H}^0$, der jedenfalls von A und B verschiedene Punkte enthält. Es sei $d \geqq 0$ der maximale Abstand eines Punktes der Menge $S \cdot \mathfrak{H}^0$ von der Geraden g. O sei ein von A und B verschiedener Punkt dieser Menge mit dem Abstand d von g. Eine in $\mathfrak{H}^0$ liegende hinreichend kleine zu g parallele Strecke mit dem Mittelpunkt in O ist eine Stützstrecke von $\mathfrak{B}$. Die Stelle O ist eine Konvexitäts- oder Konkavitätsstelle, je nachdem die einschließende Kurve eine äußere oder eine innere ist.

Die Bestimmung einer Stützstrecke in beliebig kleiner Umgebung eines Randpunktes reduziert sich somit auf die Bestimmung äußerer oder innerer einschließender Kurven in dieser Umgebung.

2. *Bestimmung der Stützstrecken einer Jordankurve.* Die Bestimmung der einschließenden Kurven in beliebig kleiner Umgebung eines Punktes P der Jordankurve ist besonders einfach. Es seien $P_1', P_2', \ldots, P_n', \ldots$ und $P_1'', P_2'', \ldots, P_n'', \ldots$ zwei zueinander fremde gegen einen gegebenen Punkt P konvergierende Punktfolgen der Jordankurve J. $\mathfrak{B}$ sei das innere und $\mathfrak{B}^*$ das äußere von J begrenzte Gebiet. Für jedes n verbinden wir die beiden Punkte P_n' und P_n'' durch eine Strecke $\overline{P_n' P_n''}$. Liegt eine Strecke $\overline{P_n' P_n''}$ für ein beliebiges n auf J, so ist jede Teilstrecke von $\overline{P_n' P_n''}$, deren beide Endpunkte von P_n' und P_n'' verschieden sind, immer eine Stützstrecke des Gebietes. Jeder von P_n' und P_n'' verschiedene Punkt dieser Strecke ist gleichzeitig eine Konvexitäts- und eine Konkavitätsstelle. Liegt die Strecke $\overline{P_n' P_n''}$ für jedes n (von einem hinreichend großen n ab) nicht ganz auf J, so enthält sie mindestens einen geradlinigen Querschnitt $\overline{X_n' X_n''}$ eines der beiden Gebiete $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}^*$. Ist $\mathfrak{U}(P)$ eine beliebig kleine Umgebung des Punktes P, so können wir für ein hinreichend großes n das Punktepaar X_n', X_n'' durch je einen ganz in $\mathfrak{U}(P) \cdot \mathfrak{B}$ verlaufenden Jordanbogen $L_{X_n', X_n''}$ und ganz in $\mathfrak{U}(P) \cdot \mathfrak{B}^*$ verlaufenden Jordanbogen $L^*_{X_n', X_n''}$ verbinden. Ist $\overline{X_n' X_n''}$ ein Querschnitt des Innengebietes, so ist

$$\overline{X_n' X_n''}^0 + L_{X_n', X_n''}$$

eine äußere einschließende Kurve innerhalb $\mathfrak{U}(P)$. Ist $\overline{X_n' X_n''}$ ein Querschnitt des Außengebietes, so ist

$$\overline{X_n' X_n''}^0 + L_{X_n', X_n''}$$

eine innere einschließende Kurve innerhalb $\mathfrak{U}(P)$. In einer beliebig kleinen Umgebung eines Punktes P der Jordankurve gibt es somit zu einem geradlinigen Querschnitt des Innen- oder Außengebietes eine parallele Stützstrecke. Also: *Die Vereinigungsmenge aller Konvexitäts- und Konkavitätsstellen einer Jordankurve liegt auf dieser überall dicht.*

3. *Der Grenzstützbereich.* Wir definieren jetzt die für unsere weiteren Betrachtungen nützlichen Begriffe des Grenzstützbereiches und der Grenzstützstrecke (beliebiger Gebiete).

Es sei T eine Stützstrecke von der Länge $2\,l$ an einer Konvexitäts- oder Konkavitätsstelle R einer Randmenge S. Es sei (r, φ) ein Polarkoordinatensystem mit dem Pol in R und der mit einer Richtung von T zusammenfallenden Achse. Den Drehsinn des Koordinatensystems wollen wir so wählen daß der Radius-Vektor zwischen 0^0 und 180^0 den der Stützstrecke T entsprechenden Stützbereich überdeckt. Die (ev. leere) Menge aller Punkte von S mit den Koordinaten $0 < \varphi < 180^0$ bezeichnen wir mit Q. Ist Q nicht leer, so bezeichnen wir mit d den Abstand des Punktes R von der abgeschlossenen Hülle Q^0. Offenbar genügt r der Beziehung $l \leqq r < \infty$. Den Bereich aller Punkte mit dem Koordinaten

$$0 \leqq \varrho \leqq d, \quad 0 \leqq \varphi \leqq 180^0$$

nennen wir den *Grenzstützbereich* (in bezug auf die durch T gegebene Richtung). Den Durchmesser dieses Grenzstützbereiches nennen wir eine *Grenzstützstrecke* an der Stelle R[5]). Ist die Menge Q leer so wollen wir die Halbebene

$$0 \leqq \varrho \leqq \infty, \quad 0 \leqq \varphi \leqq 180^0$$

als den Grenzstützbereich bezeichnen. Der Grenzstützstrecke entspricht in diesem Fall die Grenzstützgerade der Randmenge. Auch können wir (den früheren Definitionen entsprechend) von *äußeren* bzw. *inneren* Grenzstützbereichen sprechen.

4. *Das Stetigkeitslemma. Es sei*

$$R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots \to R$$

eine gegen einen Punkt R konvergierende Folge paarweise verschiedener Konvexitäts- oder Konkavitätsstellen der Berandung S eines Gebietes $\mathfrak{B}$. *Existiert in jedem Punkt* R_n *eine Stützstrecke deren Länge für jedes beliebige n größer als eine fest gegebene positive Zahl* $\mathfrak{s}$ *ist, so ist R ebenfalls eine Konvexitäts- oder Konkavitätsstelle, an welcher mindestens eine Stütz- oder Grenzstützstrecke die Länge* $\geqq \mathfrak{s}$ *hat.*

Dieser leicht einleuchtende und anschauliche Hilfssatz erfordert eine nähere Begründung. Laut Voraussetzung existiert eine Folge kongruenter (abgeschlossener) Stützbereiche

$$(1) \qquad \mathfrak{K}_1^0, \mathfrak{K}_2^0, \ldots, \mathfrak{K}_n^0, \ldots,$$

wobei für jedes n der Durchmesser $\overline{A_n B_n}$ von $\mathfrak{K}_n^0$ eine Stützstrecke in R_n ist und die Länge $\mathfrak{s}$ hat. Es seien

$$(2) \qquad A_1', A_2', \ldots, A_n', \ldots \to A$$

und

$$(3) \qquad B_1', B_2', \ldots, B_n', \ldots \to B$$

zwei gegen die Punkte A und B konvergierende Teilfolgen der Punktfolgen $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ und $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ Wir nehmen dabei an, daß die Punkte A_n' und B_n' Endpunkte einer und derselben dem Stützbereich $\mathfrak{K}_n$ entsprechenden Stützstrecke $\overline{A_n B_n}$ sind. Es sei $\overline{AB}$ die Verbindungsstrecke der Punkte A und B. Es ist leicht einzusehen, daß das Grenzgebilde[6]) der Stützstreckenfolge

$$(4) \qquad \overline{A_1' B_1'}, \overline{A_2' B_2'}, \ldots, \overline{A_n' B_n'}, \ldots$$

mit der Strecke $\overline{AB}$ identisch ist und daß die Länge der letzteren $= \mathfrak{s}$ ist. Zu diesem Zweck betrachte man eine Folge ineinandergeschachtelter Rechtecke mit zwei zu $\overline{AB}$

---

[5]) Es ist selbstverständlich, daß im Falle der Existenz verschiedener Stützstrecken an einer Stelle auch verschiedene Grenzstützbereiche an dieser Stelle existieren müssen.

[6]) Unter einem Grenzgebilde einer Folge von Mengen verstehen wir die Gesamtheit solcher Punkte, in deren beliebiger Nähe Punkte unendlich vieler Mengen der betreffenden Folge liegen.

parallelen Seiten und dem gemeinsamen Durchschnitt $\overline{AB}$. Infolge der Konvergenz der beiden Punktfolgen (2) und (3) liegen in jedem dieser Rechtecke fast alle Strecken der Folge (4). Auf Grund elementarer Überlegungen und Abstandsabschätzungen kann geschlossen werden, daß $\overline{AB}$ die Länge $\mathfrak{s}$ hat und daß der Häufungspunkt R der Mittelpunkte der Stützstrecken (4) selbst Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ sein muß. — Wir zeigen jetzt, daß die Strecke $\overline{AB}$ eine Stützstrecke an der Stelle R sein muß. $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ seien die beiden Halbebenen, in welche die Ebene durch die die Strecke $\overline{AB}$ enthaltende Gerade g zerlegt wird. Für jedes n sei g_n die Gerade, welche die Stützstrecke $\overline{A_n'B_n'}$ enthält, und $\mathfrak{E}_1^n$ bzw. $\mathfrak{E}_2^n$ seien die durch g_n begrenzten Halbebenen. $\mathfrak{E}_1^n$ sei diejenige dieser beiden Halbebenen, die den Stützbereich $\mathfrak{R}_n$ der Folge (4) enthält. Es sei c eine beliebige positive Zahl. Wir bestimmen eine unendliche Teilfolge solcher Halbebenen der Folge

$$\mathfrak{E}_1^1, \mathfrak{E}_1^2, \ldots, \mathfrak{E}_1^n, \ldots, \tag{5}$$

welche mindestens je einen solchen Punkt einer und derselben Halbebene $\mathfrak{E}_1$ oder $\mathfrak{E}_2$ enthalten, dessen Abstand von der Geraden g größer als c ist. Es sei

$$\mathfrak{E}_1^{1^*}, \mathfrak{E}_1^{2^*}, \ldots, \mathfrak{E}_1^{n^*}, \ldots \tag{6}$$

eine solche Teilfolge, die diese Eigenschaft in bezug auf $\mathfrak{E}_1$ hat. Ist P ein beliebiger innerer Punkt von $\mathfrak{E}_1$ mit einem Abstand $< \frac{1}{2}\mathfrak{s}$ von R, so müssen von einem ersten hinreichend großen Index n ab, fast alle Halbebenen der Folge (6) den Punkt P (im Innern) enthalten. Wir zeigen, daß P nicht auf S liegen kann. Wir verbinden R mit P durch die Strecke $\overline{RP}$ und für jedes n den Punkt R_n mit den Punkten R und P durch die Strecken $\overline{R_nR}$ und $\overline{R_nP}$. Bedeutet $l(\overline{X_1X_2})$ die Länge irgendeiner Strecke $\overline{X_1X_2}$, so erhalten wir für hinreichend großes $n = n_0$

$$l(\overline{R_{n_0}R}) < \tfrac{1}{2}\mathfrak{s} - l(\overline{RP})$$

und folgern aus dem Dreiecke R_nRP die Beziehung

$$l(\overline{R_{n_0}P}) < l(\overline{R_{n_0}R}) + l(\overline{RP}) < \tfrac{1}{2}\mathfrak{s}.$$

Es ist somit gezeigt, daß sämtliche innere Puunkte einer Halbkreisscheibe mit dem Mittelpunkt R und dem Durchmesser $\overline{AB}$ von inneren Punkten unendlich vieler Stützbereiche der Folge (1) überdeckt werden.

Die Gültigkeit des Stetigkeitslemmas für den n-dimensionalen Cartesischen Raum ist ohne weiteres ersichtlich.

Weiterhin bemerken wir, daß das Stetigkeitslemma sich auf beliebige abgeschlossene und beschränkte Mengen mit unendlich vielen Stützstrecken konstanter Länge übertragen läßt.

§ 2. Anwendungen auf die Theorie konvexer Figuren.

5. *Erweiterungen eines Satzes des Herrn Tietze*[7]). A. *Liegen auf der Begrenzung einer beschränkten, abgeschlossenen und zusammenhängenden Menge* $\mathfrak{S}^0$ (*in der Ebene*) *mit inneren Punkten die Stützstrecken von der Länge* ϱ *überall dicht, so ist* $\mathfrak{S}^0$ *eine konvexe Figur.*

Aus der Gültigkeit des Stetigkeitslemmas für beliebige Kontinua können wir schließen, daß in jedem Punkt der Begrenzung S von $\mathfrak{S}^0$ eine Stützstrecke oder Grenzstützstrecke von der Länge ϱ existieren muß. Danach gibt es in jedem Punkt von S

[7]) H. Tietze, Eine charakteristische Eigenschaft der abgeschlossenen konvexen Punktmengen (Math. Ann. **99** (1928), S. 394—398). Einen besonders schönen Beweis des betreffenden Satzes von Tietze brachte Herr Reinhardt im Jahresb. d. D. Math.-Vereinigung **38** (1929).

eine Stützstrecke konstanter Länge, und somit sind sämtliche Voraussetzungen des Satzes des Herrn Tietze erfüllt.

Wir bemerken hier noch, daß der betreffende Satz des Herrn Tietze aus dem bereits erwähnten (ebenfalls von Herrn Tietze stammenden) Satze, wonach die abgeschlossene Hülle einer offenen zusammenhängenden Menge mit Stützstrecken in jedem Randpunkt konvex sein muß, gefolgert werden kann. — Da $\mathfrak{S}^0$ innere Punkte enthält, so gibt es mindestens eine beschränkte Komponente $\mathfrak{H}$ der Komplementärmenge $\mathfrak{C}(S)$ von S wobei $\mathfrak{H}^0 < \mathfrak{S}^0$ gilt. Insbesondere ist auch die Berandung H von $\mathfrak{H}$ in S enthalten. In jedem Randpunkt der abgeschlossenen offenen Menge $\mathfrak{H}^0$ gibt es eine Stützstrecke von $\mathfrak{H}^0$, woraus folgt, daß $\mathfrak{H}^0$ konvex sein muß. Da nun im Innern von $\mathfrak{H}^0$ keine Punkte von S liegen können, so müßten im Falle $H \neq S$ Punkte von S in beliebiger Nähe von $\mathfrak{H}^0$ außerhalb $\mathfrak{H}^0$ liegen. Dies ist aber unmöglich, da in jedem Punkt von H Stützstrecken von $\mathfrak{S}^0$ konstanter Länge liegen müssen. Es muß also $S = H$ sein.

Eine weitere Verschärfung des Tietzeschen Satzes erhalten wir unter Ausschließung des Spezialfalles geradliniger Teile auf dem betreffenden Kontinuum.

B. *Ist S ein beschränktes Kontinuum, welches die Ebene in mindestens zwei Teile zerlegt (ohne selbst innere Punkte zu enthalten) und gibt es auf S überall dicht Stützstrecken von der Länge ϱ, während S selbst keine geradlinigen Teile von der Länge ϱ enthält, so bildet S die Berandung einer konvexen Figur*[8]).

$\mathfrak{M}(\mathfrak{h})$ sei die Gesamtheit aller Komponenten der Komplementärmenge $\mathfrak{C}(S)$ von ϱ einschließlich der einzigen unbeschränkten Komponente $\mathfrak{h}_\infty$. Nach dem Stetigkeitslemma gibt es in jedem Punkt von S eine Stütz- oder Grenzstützstrecke von der Länge ϱ. Wir wollen zeigen, daß jede dieser Stützstrecken eine Stützstrecke der Komplementärmenge $\mathfrak{C}(\mathfrak{h}_\infty)$ ist, d. h. keine innere Stützstrecke der von $\mathfrak{h}_\infty$ verschiedenen Komponenten der Menge $\mathfrak{M}(\mathfrak{h})$ sein kann. Darnach wären für $\mathfrak{C}(\mathfrak{h}_\infty)$ die Voraussetzungen des betreffenden Tietzeschen Satzes erfüllt, und S wäre die Berandung einer konvexen Figur.

Zunächst ist augenscheinlich, daß höchstens endlich viele Gebiete der Gesamtheit $\mathfrak{M}(\mathfrak{h})$ innere Stütz- oder Grenzstützstrecken von der Länge ϱ haben können. — Angenommen, es gibt innere Stützbereiche in bezug auf eine von $\mathfrak{h}_\infty$ verschiedene Komponente $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{M}(\mathfrak{h})$ mit der (offenbar zusammenhängenden) Berandung γ. — Es sei χ die Gesamtheit aller Punkte von γ mit inneren Stütz- oder Grenzstützstrecken (von $\mathfrak{h}^0$) von der Länge ϱ. Wegen Beschränktheit von $\mathfrak{h}$ muß $(\gamma - \chi) \neq 0$ sein. Nun können wir aus dem Beweis des Stetigkeitslemmas direkt entnehmen, daß χ abgeschlossen ist. Andererseits muß es aus denselben Gründen in jedem Punkt der abgeschlossenen Menge $(\gamma - \chi)^0$ eine äußere Stütz- oder Grenzstützstrecke von der Länge ϱ (in bezug auf $\mathfrak{h}$) geben. Da nun γ zusammenhängend ist, muß $\chi \cdot (\gamma - \chi)^0 \neq 0$ sein, d. h. es gibt mindestens einen Punkt auf γ mit einer äußeren und einer inneren Stütz- oder Grenzstützstrecke von der Länge ϱ. Die beiden Stützstrecken müssen zusammenfallen und auf S liegen, was nach Voraussetzung unmöglich ist.

Bezeichnen wir jetzt mit $\mathfrak{h}$ die (laut Voraussetzung existierende), von $\mathfrak{h}_\infty$ verschiedene, beschränkte Komponente von $\mathfrak{M}(\mathfrak{h})$, so muß nach dem obigen jede Stützstrecke von S von der Länge ϱ eine äußere Stützstrecke der abgeschlossenen Menge

---

[8]) Die Ausschließung des Falles geradliniger Stücke auf S von der Länge ϱ ist notwendig. Man betrachte etwa die Randlinie des in Polarkoordinaten (r, φ) gegebenen nicht konvexen Bereiches

$$90^0 \leqq \varphi \leqq 360^0, \quad 0 \leqq r \leqq 1.$$

Setzen wir $\varrho = 1$ voraus, so können wir direkt einsehen, daß in jedem Punkt der Kurve eine Stützstrecke von der Länge ϱ existiert. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{M}_x$ bzw. $\mathfrak{M}_v$ die Gesamtheit aller Konvexitäts- und Konkavitätsstellen der Kurve, so enthält der Durchschnitt $\mathfrak{M}_x \cdot \mathfrak{M}_v$ die beiden Punkte $(0^0, \frac{1}{2})$ und $(90^0, \frac{1}{2})$.

$(\mathfrak{h}^0 + S)$ (mit inneren Punkten !) sein. Die Menge $(\mathfrak{h}^0 + S)$ genügt den Voraussetzungen des Satzes A und muß konvex sein. Andererseits muß die Berandung der betreffenden konvexen Figur mit S identisch sein. — Die Gültigkeit der entsprechenden Sätze auch für n-dimensionale Cartesische Räume ist evident.

6. *Die Stützgeraden einer konvexen Figur.* Als eine weitere Anwendung des Stetigkeitslemmas gewinnen wir eine sehr einfache Bestimmung der Stützgeraden in einem gegebenen Randpunkt einer konvexen ebenen Figur und den Beweis des Satzes des Herrn Brunn [9]) über die Existenz der Stützgeraden in jedem Begrenzungspunkt. — Es sei $\mathfrak{B}$ ein konvexer Bereich und H seine Berandung. Wie sehr leicht ersichtlich, ist H eine Jordankurve. P sei ein vorgegebener Begrenzungspunkt der konvexen Figur. Es ist ohne weiteres klar, daß jede Stützstrecke einer konvexen Figur zu einer Stützgeraden erweitert werden kann. Dies ermöglicht uns die Anwendung des Stetigkeitslemmas. Es sei

$$J_{A_1,B_1},\ J_{A_2,B_2},\ \ldots,\ J_{A_n,B_n},\ \ldots$$

eine beliebige gegen P konvergierende Folge von Teilbögen der Kurve H. Die Gerade durch die beiden Endpunkte A_n und B_n des Bogens J_{A_n,B_n} $(n = 1, 2, \ldots)$ bezeichnen wir mit g_n. Mit Hilfe der einschließenden Kurven können wir zu jeder Geraden g_n eine parallele Stützstrecke in einem Punkt von J_{A_n,B_n} bestimmen. Diese Stützstrecke erweitern wir für jedes n zu einer Stützgeraden T_n. Gegen eine durch den Punkt P gehende Grenzgerade g einer Teilfolge der Folge $g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots$ konvergiert auch eine Teilfolge der Folge $T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$ Nach dem Stetigkeitslemma konvergiert die betreffende Stützgeradenfolge gegen eine Stützgerade in P, woraus folgt, daß g eine Stützgerade in P sein muß.

§ 3. Die Verteilung der Stützstrecken.

7. *Die gewöhnlichen Kurvenpunkte.* Im nachfolgenden beschäftigen wir uns hauptsächlich mit dem allgemeinen Fall solcher Kurvenpunkte, die in keinem an sich konvexen [10]) Bogen der Jordankurve J enthalten sind. Solche Punkte der Jordankurve nennen wir *singulär*. Einen nicht singulären Punkt, d. h. einen von den Endpunkten verschiedenen Punkt eines an sich konvexen Kurvenbogens, bezeichnen wir als *gewöhnlich*. Während eine aus Konvexitätsstellen bestehende geschlossene Jordankurve konvex ist, trifft die entsprechende Aussage für einen Kurvenbogen nicht zu. Der Zusammenhang hier ist freilich ein sehr einfacher:

Ein jeder von den beiden Endpunkten verschiedene Punkt P eines nur aus Konvexitäts- oder nur aus Konkavitätsstellen bestehenden Kurvenbogens $J_{A,B}$ liegt auf einem an sich konvexen Teilbogen des Bogens $J_{A,B}$ [11]). Einen solchen konvexen Teilbogen des Bogens $J_{A,B}$ erhalten wir innerhalb einer hinreichend kleinen Umgebung $\mathfrak{U}(P)$ des Punktes P, für welche $J \cdot \mathfrak{U}(P) = J_{A,B} \cdot \mathfrak{U}(P)$ ist.

Der triviale Fall, in dem P ein innerer Punkt eines geradlinigen Teils von $J_{A,B}$ ist, sei ausgeschlossen. Im Falle, daß sämtliche Punkte von $J_{A,B}$ Konvexitätsstellen sind, wählen wir innerhalb $\mathfrak{U}(P)$ einen geeigneten den Punkt P enthaltenden Teilbogen J_{P_1,P_2} von $J_{A,B}$, dessen beide Endpunkte durch einen ganz in $\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{U}(P)$ verlaufenden

[9]) H. Brunn, Fundamentalsatz von den Stützen eines Eigebietes, Math. Ann. **100** (1928); vgl. auch Archiv d. Math. u. Phys. (3) **17** (1910). Dieser Satz geht bereits auf Minkowski zurück (Geometrie der Zahlen). Unsere Betrachtung betrifft ausschließlich den Fall der Ebene.

[10]) Einen konvexen oder konkaven Bogen der Jordankurve nennen wir an sich konvex. Durch geradlinige Verbindung seiner Endpunkte wird er zu einer konvexen Figur ergänzt.

[11]) Ein wesentlich schärferes Resultat über solche Kurvenbögen erhalten wir (im § 5) unter besonderer Berücksichtigung der Bogenendpunkte.

Jordanbogen L_{P_1,P_2} verbunden werden können. Wir behaupten, die Strecke $\overline{P_1P_2}$ muß (von den Endpunkten abgesehen) ganz in $\mathfrak{B}$ verlaufen. Angenommen, dies sei nicht der Fall. Verläuft $\overline{P_1P_2^0}$ ganz außerhalb $\mathfrak{B}$, so bildet die geschlossene Kurve

$$\overline{P_1P_2^0} + L_{P_1,P_2}$$

eine innere einschließende Kurve. Im anderen Fall trifft die Strecke $\overline{P_1P_2}$ die Kurve $J_{A,B}$ in einem (von P_1 und P_2 verschiedenen) Punkt X. Die Kurve $\overline{P_1P_2^0} + L_{P_1,P_2}$ zerlegt die Ebene in endlich oder unendlich viele Teilgebiete. Das Teilgebiet, auf dessen Begrenzung X liegt, wird von einer einschließenden Kurve begrenzt. In beiden Fällen bezeichnen wir das beschränkte von der einschließenden Kurve begrenzte Gebiet mit $\mathfrak{H}$. Enthält $\mathfrak{H}$ Punkte von $J_{A,B}$, so gibt es in $\mathfrak{H}$ eine Konkavitätsstelle von $J_{A,B}$, welche nicht gleichzeitig eine Konvexitätsstelle ist. Im anderen Fall berücksichtigen wir, daß $\overline{P_1P_2}$ nicht ganz auf J liegen kann, und schließen, daß auf $\overline{P_1P_2}\,\mathfrak{H}^0$ eine Konkavitätsstelle liegen muß, die nicht gleichzeitig eine Konvexitätsstelle ist. Die beiden Fälle sind laut Voraussetzung unmöglich.

Wir schließen jetzt, daß sämtliche Punkte der Kurve $\overline{P_1P_2^0} + L_{P_1,P_2}$ Konvexitätsstellen in bezug auf das von ihr begrenzte beschränkte Gebiet sein müssen. Nach dem (bereits erwähnten) Satz von Tietze [12]) muß J_{P_1,P_2} konvex sein. — Eine ganz entsprechende Betrachtung gilt im Falle, daß $J_{A,B}$ nur aus Konkavitätsstellen besteht.

8. *Die singulären Kurvenpunkte.* Wir betrachten jetzt eine beliebige singuläre Stelle P, die unter Umständen selbst weder eine Konvexitäts- noch eine Konkavitätsstelle sein kann. Wir beweisen zunächst den folgenden Satz, den wir als „Gleichmäßigkeitssatz“ bezeichnen wollen:

Ist P eine singuläre Stelle der Jordankurve J, so existiert immer eine gegen den Punkt P konvergierende Folge von Teilbögen der Kurve J

$$J_1, J_2, \ldots, J_n, \ldots$$

so, daß die Länge aller äußeren oder aller inneren Grenzstützstrecken eines Bogens J_n (je nachdem die Konvexitäts- oder die Konkavitätsstellen auf J in einer Umgebung von P überall dicht liegen) für jedes beliebige n $< \frac{1}{2^n}$ ist.

Wir setzen den Fall voraus, in dem die Konvexitätsstellen auf J (in einer Umgebung von P) überall dicht liegen. Die nachfolgende Betrachtung gilt wörtlich auch für den anderen Fall. — Es sei

$$J'_{(P)}, J''_{(P)}, \ldots, J^{(\nu)}_{(P)}, \ldots$$

eine Folge ineinandergeschachtelter gegen P konvergierender Kurvenbögen von J. Angenommen, ein erster Bogen $J^{(\mu)}_{(P)}$ $(\nu = \mu)$ enthält für kein $n \geqq n_0$ einen unserer Behauptung genügenden Teilbogen J_n. Darnach können wir in einem noch so kleinen Teilbogen (d. h. einem Teilbogen mit beliebig kleinem Durchmesser) von $J^{(\mu)}_{(P)}$ eine solche Konvexitätsstelle angeben, die mindestens einen äußeren Grenzstützbereich mit einem Durchmesser $\geqq \frac{1}{2^{n_0}}$ besitzt. Es gäbe also auf $J^{(\mu)}_{(P)}$ eine überall dicht liegende Menge von Stützstrecken von der Länge $\frac{1}{2^{n_0}}$ $(n = n_0$ fest). Nach dem Stetigkeitslemma müßten sämtliche Punkte von $J^{(\mu)}_{(P)}$ Konvexitätsstellen sein, und P wäre im Widerspruch zu unserer Annahme (nach der in Ziff. 7 bewiesenen Behauptung) ein gewöhnlicher Kurvenpunkt. (Aus dem bewiesenen Satz folgt natürlich keineswegs, daß in

[12]) Vgl. die unter [1]) zitierten Noten des Herrn Tietze.

einer hinreichend kleinen Umgebung von P keine Stellen mit beliebig großen Stützstrecken liegen können.)

Es sei jetzt δ eine beliebig kleine Zahl und $\mathfrak{U}(P)$ eine hinreichend kleine Kreisumgebung des Punktes P mit einem Radius δ, in welcher die Kurve J nicht ganz enthalten ist. $\mathfrak{U}'(P)$ sei eine hinreichend kleine Kreisumgebung von P mit einem Radius $\delta' < \delta$ mit der Eigenschaft, daß jedes Punktepaar des Durchschnittes $J \cdot \mathfrak{U}'(P)$ sich durch je einen einfachen ganz in $\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{U}(P)$ bzw. ganz in $\mathfrak{B}^* \cdot \mathfrak{U}(P)$ verlaufenden Kurvenbogen verbinden läßt. Weiterhin sei $\mathfrak{U}''(P)$ eine solche hinreichend kleine Kreisumgebung von P mit einem Radius $\delta'' < \delta'$, die derselben Bedingung in bezug auf $\mathfrak{U}'(P)$ genügt, wonach jedes Punktepaar von $J \cdot \mathfrak{U}''(P)$ durch je einen ganz in $\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{U}'(P)$ bzw. $\mathfrak{B}^* \cdot \mathfrak{U}'(P)$ verlaufenden Kurvenbogen sich verbinden läßt. Die Existenz der geeigneten hinreichend kleinen Umgebungen $\mathfrak{U}'(P)$ und $\mathfrak{U}''(P)$ ergibt sich aus der Unbewalltheit der Jordankurve in bezug auf die beiden Gebiete $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}^*$. — Es sei $J_{(P)}$ der zusammenhängende den Punkt P enthaltende Bogen (Komponente) der Durchschnittsmenge $J \cdot \mathfrak{U}''(P)$. Wir nehmen an, auf $J_{(P)}$ liegt die Gesamtheit aller Konvexitätsstellen überall dicht. (Ebensogut könnten wir die Gesamtheit der Konkavitätsstellen wählen.) Nach dem oben bewiesenen Satz existiert ein ganz in $\mathfrak{U}''(P)$ liegender Teilbogen $J_{X_1, X_2} < J_{(P)}$, mit der Eigenschaft, daß sämtliche äußeren Grenzstützbereiche seiner Punkte innerhalb $\mathfrak{U}''(P)$ liegen. $\mathfrak{M}_x$ sei die Menge aller Konvexitätsstellen von J_{X_1, X_2}. X sei eine beliebige dieser Stellen, $\mathfrak{K}$ ein (äußerer) Grenzstützbereich in ihr und T die entsprechende Grenzstützstrecke. Auf der Kreisperipherie von $\mathfrak{K}$ liegt mindestens eine Stelle R der Kurve J (welche evtl. auch auf T liegen kann). Diese Stelle verbinden wir mit X durch die Strecke $\overline{XR}$. Weiterhin kann das Punktepaar X, R durch einen ganz in $\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{U}'(P)$ verlaufenden Jordanbogen $L_{X,R}$ verbunden werden. Wir erhalten auf diese Weise eine innere einschließende Kurve

$$\overline{XR}^0 + L_{X,R},$$

die uns die Bestimmung einer Konkavitätsstelle auf J in einer Entfernung $< \delta'$ von P ermöglicht. Da wir den Wert $\delta > \delta'$ willkürlich gewählt haben, so können wir bereits jetzt schließen, daß *in einer noch so kleinen Umgebung einer singulären Stelle der Kurve gleichzeitig Konvexitäts- und Konkavitätsstellen liegen müssen*, wobei natürlich möglich ist, daß es unter Umständen nur eine einzige Konkavitätsstelle (oder entsprechend, nur eine einzige Konvexitätsstelle) nämlich die Stelle P selbst, geben kann.

Es ist einleuchtend, daß nur in besonderen Fällen auf der Grenzstützstrecke T außer X selbst noch weitere Punkte der Jordankurve vorhanden wären, obwohl solche Stellen auf der Peripherie von $\mathfrak{K}^0$ immer liegen müssen. Liegen auf T tatsächlich keine von X verschiedenen Punkte von J und verlängern wir T in beiden entgegengesetzten Richtungen zu einer Geraden, so muß diese mindestens auf einer Seite von X einen Punkt der Jordankurve in einer Entfernung $< \delta'$ von der Stelle P treffen. Der Grenzstützbereich $\mathfrak{K}^0$ wird durch $\overline{XR}$ in zwei Sektoren zerlegt, von welchen der eine in dem abgeschlossenen, durch die einschließende Kurve $\overline{XR}^0 + L_{X,R}$ begrenzten beschränkten Gebiet $\mathfrak{H}^0$ liegt. Die auf der Begrenzung dieses Kreissektors liegende Hälfte der Grenzstützstrecke T muß mit Ausnahme eines Endpunktes ganz innerhalb $\mathfrak{H}$ liegen. Verlängern wir diese Streckenhälfte zu einer Halbgeraden mit einem Endpunkt in X, so muß diese Halbgerade den Bogen $L^0_{X,R}$ treffen, was zur Folge hat, daß auch ein erster Punkt O von J in einer Entfernung $< \delta'$ von der Stelle P getroffen wird. — Liegt auf T ein von X verschiedener Punkt der Kurve, so bezeichnen wir diesen ebenfalls mit O. In beiden Fällen können wir die Endpunkte der Strecke $\overline{XO} < \mathfrak{U}'(P)$ durch einen ganz innerhalb $\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{U}(P)$ verlaufenden Jordanbogen $L_{X,O}$ verbinden. Wir erhalten eine innere ein-

schließende Kurve

$$\overline{XO}^0 + L_{X,O},$$

deren Durchmesser $< 2\delta$ ist. Diese einschließende Kurve ermöglicht uns die Bestimmung einer Konkavitätsstelle in einer Entfernung $< \delta$ von P. Nach der üblichen Methode erhalten wir eine zu $\overline{XO}$ bzw. T parallele Stützstrecke. Diese Konstruktion einer zu der gegebenen parallelen Strützstrecke läßt sich für jeden Punkt der Menge $\mathfrak{M}_x$ durchführen. Berücksichtigen wir noch, daß die entsprechenden Betrachtungen auch für Konkavitätsstellen — also jedenfalls für eine der beiden Arten der Kurvenpunkte — gelten, so erhalten wir das folgende Resultat, welches wir im nachfolgenden als den „Parallelitätssatz“ bezeichnen:

Ist P ein singulärer Punkt einer Jordankurve J, so liegt in einer noch so kleinen Umgebung von P ein Kurvenbogen J_{X_1, X_2} der Jordankurve mit folgender Eigenschaft:

Zu jeder Stützstrecke in einer jeden Stelle einer auf diesem Kurvenbogen überall dicht liegenden Gesamtheit $\mathfrak{M}_x$ aller Konvexitätsstellen (oder auch der Gesamtheit $\mathfrak{M}_v$ aller überall dicht liegenden Konkavitätsstellen) gibt es eine zu ihr parallele Stützstrecke an einer innerhalb derselben Umgebung liegenden Konkavitätsstelle (bzw. Konvexitätsstelle).

9. *Kurvenpunkte ohne Stützstrecken.* Besonders ausgeprägt ist der geschilderte Sachverhalt in der Umgebung solcher Stellen der Jordankurve, die weder Konvexitäts- noch Konkavitätsstellen sind. Diese Stellen sind jedenfalls singulär und wir schließen zunächst, daß gegen eine solche Stelle immer Folgen paarweise verschiedener Konvexitäts- und Konkavitätsstellen gleichzeitig sich häufen müssen. Gehen wir z. B. von Konvexitätsstellen aus, so müssen in einer noch so kleinen Umgebung von P auch Konkavitätsstellen liegen, welche diesmal von P selbst verschieden sein müssen.

Es sei nun l eine beliebig kleine Zahl und $J'_{(P)}, J''_{(P)}, \ldots, J^{(\nu)}_{(P)}, \ldots$ eine Folge ineinandergeschachtelter gegen die Stelle P konvergierenden Kurvenbögen. Aus dem Stetigkeitslemma können wir folgern, daß *sämtliche Grenzstützbereiche eines Kurvenbogens $J^{(\mu)}_{(P)}$ ($\nu = \mu$ hinreichend groß) einen Radius $< l$ haben müssen.* Dies trifft nicht nur für Grenzstützbereiche an Stellen der einen Art, sondern für solche an allen Konvexitäts- und Konkavitätsstellen des Kurvenbogens $J^{(\mu)}_{(P)}$ zu.

Mit $\mathfrak{M}_x$ und $\mathfrak{M}_v$ bezeichnen wir die Gesamtheit aller Konvexitäts- bzw. aller Konkavitätsstellen des Kurvenbogens $J^{(\mu)}_{(P)}$. Ist δ eine beliebig kleine Zahl und $\nu = \mu$ ein hinreichend großer Index, so können wir dieselbe Konstruktion paralleler Stützstrecken die wir in Ziff. 8 in bezug auf die Gesamtheit $\mathfrak{M}_x$ der Konvexitätsstellen eines Teilbogens J_{X_1, X_2} des Bogens $J_{(P)}$ durchgeführt haben, jetzt in bezug auf die Stellen beider Art der Gesamtheit

$$\mathfrak{M}_x + \mathfrak{M}_v < J^{(\mu)}_{(P)}$$

innerhalb einer Umgebung von P mit dem Radius δ durchführen. Wir erhalten somit den Satz:

Ist P ein Punkt der Jordankurve, in welchem keine Stützstrecken liegen, und ist δ eine beliebig kleine positive Größe, so gibt es zu jeder Stützstrecke an einer Konvexitäts- oder Konkavitätsstelle eines hinreichend kleinen den Punkt P in seinem Innern enthaltenden Kurvenbogens $J^{(\mu)}_{(P)}$ eine zu ihr parallele Stützstrecke anderer Art an einer von P um weniger als δ entfernten Stelle.

Der jetzige wesentlich schärfere Sachverhalt gegenüber dem allgemeinen Fall einer singulären Stelle ist offenbar. Die Verschärfung hat einen mehrfachen Charakter. Während im allgemeinen Fall einer singulären Stelle die Sätze in Ziff. 8 die Stützstrecken eines Kurventeilbogens in hinreichender Nähe von P betrafen, beziehen sich die letzten

Sätze auf die Stützstrecken eines Bogens $J_{(P)}^{(\mu)}$, welcher die Stelle P selbst als einen inneren Punkt enthält. Weiterhin betreffen die verschärften Sätze im Falle einer Stelle ohne Stützstrecken die Konvexitäts- und Konkavitätsstellen gleichzeitig und gelten für alle Stellen beider Art, was im allgemeinen Falle, wie einfache Beispiele zeigen, nicht zutrifft. Schließlich sei noch erwähnt, daß an Stellen ohne Stützstrecken tatsächlich zwei unendliche Folgen paarweise verschiedener gegen P konvergierender Konvexitäts- und Konkavitätsstellen mit paarweise parallelen Stützstrecken existieren müssen.

Für die Verteilung der Konvexitäts- und Konkavitätsstellen in der Umgebung eines Gebietsrandpunktes ohne Stützstrecken ist die Voraussetzung einer Jordankurve als Rand sehr wesentlich. Wir haben oben insbesondere von der Eigenschaft einer Jordankurve die Ebene in genau zwei Teile zu zerlegen Gebrauch gemacht. Dies ist auch einleuchtend. Sind auch sämtliche Punkte der Berandung S eines Bereiches $\mathfrak{B}$ Grenzpunkte der Komplementärmenge eines gegebenen Gebietes $\mathfrak{B}$ und für dieses letztere allseitig erreichbar, so kann S dennoch Punkte ohne Stützstrecken enthalten, in deren hinreichend kleiner Umgebung Randpunkte der einen Art ganz fehlen können. Eine solche Stelle liegt z. B. auf der Berandung eines innerhalb eines Kreisringes liegenden Gebietes, welches entsteht, wenn man in dem Kreisring einen Bogen des äußeren Kreises durch einen den inneren Kreis berührenden Kreisbogen ersetzt. Der Berührungspunkt des Kreisbogens mit dem inneren Kreis ist eine solche Stelle.

Dieser Sachverhalt wird uns sofort ganz allgemein verständlich, wenn man berücksichtigt, daß der Mittelpunkt und ein auf der Peripherie eines noch so kleinen Grenzstützbereiches liegender Punkt den Randmengen verschiedener Komplementärgebiete eines gegebenen Gebietes $\mathfrak{B}$ angehören können, weshalb die Bildung der einschließenden Kurven unmöglich wird.

§ 4. Kurven ohne konvexe Teilbögen.

10. *Die Verteilung der Stellen ohne Stützstrecken.* Wir betrachten jetzt näher die Kurven, deren sämtliche Punkte singulär sind. Im Gegensatz zu den konvexen Bögen liegen auf solchen Kurven die Stützstrecken von einer festen Länge ϱ nirgends dicht. — Auf einer Kurve J, deren sämtliche Punkte singulär sind, liegen die Konvexitäts- und Konkavitätsstellen überall dicht. Für J ist aber besonders charakteristisch die Verteilung der Punkte dritter Art, nämlich solcher Stellen, die weder Konvexitäts- noch Konkavitätsstellen sind. Es gilt nämlich der folgende Satz:

Auf einer Jordankurve J (oder einem Jordanbogen) ohne (an sich) konvexe Teilstücke liegen die Stellen ohne Stützstrecken überall dicht.

Nach dem Gleichmäßigkeitssatz enthält jedes noch so kleine Intervall der Kurve J Stellen mit beliebig kleinen äußeren und inneren Grenzstützbereichen. Jeder endliche Grenzstützbereich der Kurve enthält einen geradlinigen Querschnitt des äußeren oder des inneren von der Kurve J begrenzten Gebietes, je nachdem der betreffende Grenzstützbereich ein äußerer oder ein innerer ist.

Es sei $\overline{A_1 B_1}$ ein geradliniger Querschnitt von der Länge d des von J begrenzten Innengebietes $\mathfrak{B}$ und J_{A_1, B_1}, ein Kurventeilbogen von J mit den Endpunkten A_1 und B_1. $\overline{C_1 D_1}$ sei ein geradliniger Querschnitt des von J begrenzten Außengebietes $\mathfrak{B}^*$, dessen Länge $< \frac{d}{2}$ ist und dessen beide Endpunkte auf J_{A_1, B_1} liegen und von A_1 und B_1 verschieden sind. — Ganz allgemein definieren wir durch Induktionsschluß einen geradlinigen Querschnitt $\overline{A_n B_n}$ von $\mathfrak{B}$, dessen Länge $< \frac{d}{2^{2n-2}}$ ist und dessen beide Endpunkte

auf dem Kurvenbogen $J_{C_{n-1}, D_{n-1}}$ liegen und von den Endpunkten C_{n-1} und D_{n-1} verschieden sind. Mit $J_{A_n B_n}$ bezeichnen wir den Teilbogen des Bogens $J_{C_{n-1}, D_{n-1}}$ mit den Endpunkten A_n und B_n. Wir definieren jetzt einen geradlinigen Querschnitt $\overline{C_n D_n}$ des Außengebietes $\mathfrak{B}^*$, dessen Länge $< \frac{d}{2^{2n-1}}$ ist und dessen beide Endpunkte auf J_{A_n, B_n} liegen und von A_n bzw. B_n verschieden sind. Wir erhalten auf diese Weise eine ineinandergeschachtelte Folge von Kurvenbögen

$$J_{A_1, B_1} > J_{C_1, D_1} > J_{A_2, B_2} > J_{C_2, D_2} > \ldots,$$

die gegen einen Punkt P konvergiert. — Wir wollen uns überzeugen, daß P weder eine Konvexitäts- noch eine Konkavitätsstelle sein kann. — Angenommen, es gibt in P eine Stützstrecke T von der Länge 2ϱ. T sei eine äußere Stützstrecke und $\mathfrak{K}$ der entsprechende Stützbereich. Der Durchmesser des zu J_{A_1, B_1} komplementären Teilbogens der Jordankurve J sei I. Für hinreichend großes $n > n_0$ läßt sich (wegen der Unbewalltheitseigenschaften der Jordankurve) jedes Punktepaar C_n, D_n durch einen ganz innerhalb $\mathfrak{B}$ verlaufenden Jordanbogen L_{C_n, D_n} verbinden, dessen Durchmesser $< I$ ist. Für $n > n_0$ wird der P enthaltende Jordanbogen J_{C_n, D_n} von der Jordankurve $(\overline{C_n D_n}^0 + L_{C_n, D_n})$ eingeschlossen. Für ein hinreichend großes $n = n_1 > n_0$ läßt sich das Punktepaar C_{n_1}, D_{n_1} durch einen ganz in $\mathfrak{B}$ verlaufenden Jordanbogen $L_{D_{n_1}, C_{n_1}}$ mit einem Durchmesser $< \frac{\varrho}{3}$ verbinden. Der Stützbereich $\mathfrak{K}^0$ kann offenbar von der Kurve $(\overline{C_{n_1} D_{n_1}}^0 + L_{C_{n_1} D_{n_1}})$ nicht eingeschlossen werden und wird von dieser letzteren zerlegt. Eine solche Zerlegung ist aber nur durch einen Querschnitt auf $C_{n_1} D_{n_1}$ denkbar. $\mathfrak{K}^{*0}$ sei derjenige der beiden betreffenden Teilbereiche von $\mathfrak{K}^0$, der P enthält. Dieser Bereich muß einerseits von der Kurve $(\overline{C_{n_1} D_{n_1}} + L_{D_{n_1} C_{n_1}})$ eingeschlossen werden, andererseits aber einen Durchmesser $> \varrho$ haben, was offenbar unmöglich ist. — Die Voraussetzung einer inneren Stützstrecke in P führt zu einem ganz entsprechenden Widerspruch, und somit ist unsere Behauptung bewiesen.

11. *Jordankurven mit abzählbar vielen Konvexitäts- und Konkavitätsstellen.* Die Gesamtheit aller Konvexitäts- und Konkavitätsstellen kann abzählbar sein. Diese Eigenschaft besitzen Jordankurven einer sehr allgemeinen Art sogar immer. Wir bringen zunächst ein Beispiel solcher Kurven.

Im Innern eines Rechtecks $ABCD$ (Fig. 1) seien vier kongruente gleichschenklige Dreiecke gegeben, deren Grundseiten mit den Seiten des Rechtecks zusammenfallen (und umgekehrt), während die Schenkel paarweise verschiedener Dreiecke nirgends im Innern des Vierecks sich treffen. Diese gleichschenkligen Dreiecke nennen wir von „erster Ordnung" (z. B. das Dreieck ABC_1 in Fig. 1). Im Innern eines jeden Dreiecks erster Ordnung seien wiederum zwei kongruente gleichschenklige Dreiecke gegeben, deren Grundseiten mit den Schenkeln des Dreiecks erster Ordnung zusammenfallen, wobei die Schenkel dieser beiden verschiedenen Dreiecke im Innern des Dreiecks erster Ordnung sich nirgends treffen. Jedes solche gleichschenklige Teildreieck eines Dreiecks erster Ordnung nennen wir ein Dreieck „zweiter Ordnung" (z. B. das Dreieck AC_1C_2 in Fig. 1). In jedem Dreieck zweiter Ordnung definieren wir ganz analog zwei gleichschenklige Dreiecke dritter Ordnung usf. — $\mathfrak{M}$ sei die Vereinigungsmenge aller Eckpunkte sämtlicher gleichschenkligen Dreiecke beliebiger n-ten ($n \to \infty$) Ordnung. $\mathfrak{M}_x$ sei die Ableitung der Menge $\mathfrak{M}$. Die abgeschlossene Menge

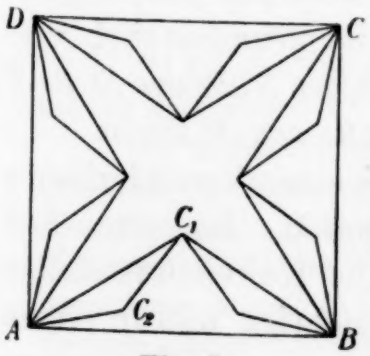


Fig. 1.

$$\mathfrak{M} + \mathfrak{M}_\alpha = J$$

ist eine Jordankurve. Die Menge $\mathfrak{M}_\alpha$ besteht aus solchen Punkten, die weder Konvexitäts- noch Konkavitätsstellen sind und hat die Mächtigkeit des Kontinuums, während die abzählbare Menge $\mathfrak{M}$ sämtliche Konvexitäts- und Konkavitätsstellen der Kurve enthält.

Die Kurve J stellt ein Beispiel einer sehr allgemeinen Art von Jordankurven dar, die durch linear geordnete Dreiecksketten erzeugt werden können. Diese Erzeugung der Jordankurven ist ein besonders einfaches und allgemeines Kondensationsverfahren der Stellen ohne Stützstrecken. Solche Kurven enthalten immer nur abzählbar viele Konvexitäts- und Konkavitätsstellen. Wir heben hier nur noch die Ketten endlich vieler Dreiecke hervor, obwohl geeignete Ketten unendlich vieler Dreiecke auf mannigfache Weise sich bilden lassen.

Unter einer *linear geordneten Dreieckkette* verstehen wir eine endliche Folge von Dreiecken mit der Eigenschaft, daß jedes Dreieck der Folge (vom ersten und letzten abgesehen) mit dem vorhergehenden und dem nachfolgenden je eine Ecke gemeinsam hat, sonst aber zu diesem fremd ist. Im Falle, daß die Kette nur zwei Dreiecke enthält mögen dieselben ebenfalls nur eine Ecke gemeinsam haben.

Eine lineare Dreieckskette $\mathfrak{m}_1(D)$, wie auch jedes Dreieck dieser Kette, nennen wir „von erster Ordnung". Wir setzen dabei voraus, daß die Seitenlängen eines jeden Dreiecks von $\mathfrak{m}_1(D)$ unterhalb einer positiven Größe l liegen. Wir definieren jetzt eine Kette zweiter Ordnung„" von Dreiecken, die sämtlich innerhalb der Dreiecke erster Ordnung liegen mögen und deren Seitenlängen $< \frac{l}{2}$ seien. Wir setzen dabei voraus, daß jeder Eckpunkt eines Dreiecks erster Ordnung auch ein Eckpunkt eines Dreiecks zweiter Ordnung ist, während andererseits mit Ausnahme der Eckpunkte keine Punkte der Dreiecke zweiter Ordnung auf den Seiten der Dreiecke erster Ordnung liegen. Die lineare Kette zweiter Ordnung bezeichnen wir mit $\mathfrak{m}_2(D)$. Ganz entsprechend definieren wir eine lineare Dreieckkette $\mathfrak{m}_3(D)$ „dritter Ordnung", wobei die Seitenlängen $< \frac{l}{3}$ sein mögen usf. Die Folge der ineinandergeschachtelten Dreieckketten $\mathfrak{m}_1(D), \mathfrak{m}_2(D), \ldots$ konvergiert gegen eine Jordankurve. Es ist nicht schwer einzusehen, daß mit Ausnahme abzählbar unendlich vieler Eckpunkte aller Dreiecke beliebiger Ordnung, sämtliche Kurvenpunkte weder Konvexitäts- noch Konkavitätsstellen sind.

§ 5. Die Gestalt der Kurve in der Umgebung einer singulären Stelle.

12. *Die Stützoszillationspunkte.* Es sei P ein beliebiger Kurvenpunkt. Zwei beliebige Bögen $J_{A,P}$ und $J_{B,P}$ der Kurve J, die in P zusammenstoßen, sonst aber keine gemeinsamen Punkte haben, bezeichnen wir als verschiedene Seiten (etwa „hintere" und „vordere") der Jordankurve in bezug auf die Stelle P. Wir setzen P als singulär voraus. Der Verlauf der Jordankurve in der Umgebung von P ist grundsätzlich verschieden, *je nachdem die Konvexitäts- und Konkavitätsstellen in beliebiger Nähe der Stelle P auf verschiedenen oder bereits gleichzeitig auf einer und derselben Seite von P liegen.*

Im letzteren Fall (welcher auch für oszillierende Funktionen einer Veränderlichen charakteristisch ist) nennen wir die Stelle P einen *Stützoszillationspunkt.* Im ersten Fall liegen auf einer und derselben Seite der Stelle P entweder nur die Konvexitätsstellen oder nur die Konkavitätsstellen. Dies ist klar, wenn man berücksichtigt, daß in einem solchen Fall in hinreichender Nähe von P keine Stellen ohne Stützstrecken liegen können.

Für Stützoszillationspunkte ist besonders charakteristisch, daß sie *niemals isolierte singuläre Stellen sein können.*

Es sei O ein beliebiger Stützoszillationspunkt der Kurve und R ein beliebiger Kurvenpunkt in einer Entfernung r von O. Angenommen, R ist eine gewöhnliche Konvexitätsstelle der Kurve. Mit $\mathfrak{M}$ bezeichnen wir die Gesamtheit aller Konvexitätsstellen der Kurve und durchlaufen den Kurvenbogen $J_{R,O}$ in geeigneter Richtung von R nach O bis erstmals ein von O verschiedener Punkt R_1 der Menge $(J - \mathfrak{M})^0$ getroffen wird. Im Falle einer gewöhnlichen Konkavitätsstelle R verstehen wir unter $\mathfrak{M}$ die Gesamtheit aller Konkavitätsstellen der Kurve und bestimmen ganz analog den Punkt R_1. Ist R eine singuläre Stelle, so setzen wir $R = R_1$. Allgemein gehen wir von einem beliebigen Punkt R der Jordankurve in einer Entfernung $\frac{1}{n}\,r$ von O aus und bestimmen in analoger Weise wie oben den Punkt R_n. Die Punktfolge $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$ besteht aus singulären Stellen und konvergiert gegen O.

13. *Die isolierten Singularitäten.* Wir betrachten jetzt die isoliert liegenden singulären Stellen oder auch solche, die mindestens für eine Seite keine Häufungspunkte singulärer Stellen sind. Für solche Stellen ist die Unterscheidung der Punkte mit und ohne Stützstrecken besonders wesentlich. Weiterhin müssen wir die beiden Fälle unterscheiden, je nachdem in der betreffenden singulären Stelle zwei an sich konvexe Bögen zusammenstoßen oder nicht.

Ist eine isolierte singuläre Stelle P eine Konvexitäts- oder Konkavitätsstelle und stoßen in ihr zwei (an sich) konvexe Bögen $C_{P,X}$ und $C_{P,Y}$ zusammen, so gibt es in P mindestens zwei verschiedene Stützstrecken.

P sei eine Konvexitätsstelle (der Beweis im anderen Fall verläuft ganz entsprechend). In diesem Fall muß einer der beiden Bögen — es sei dies etwa $C_{P,Y}$ — konkav sein. T sei eine Stützstrecke in P und $\mathfrak{K}$ der entsprechende Stützbereich. Wir definieren ein Polarkoordinatensystem (r, φ) mit dem Pol in P und einer mit T zusammenfallenden Achse. $\mathfrak{K}$ möge in diesen Koordinaten zwischen 180^0 und 360^0 liegen. Wir verbinden P mit einem Punkt Y' des Bogens $C_{P,Y}$, dessen Amplitude φ' der Beziehung $0 < \varphi' < 180^0$ genügt. Der Kurvenbogen $C_{P,Y}$ muß entweder ganz im Winkelraum $\varphi' \leqq \varphi \leqq 180^0$ oder $0 \leqq \varphi \leqq \varphi'$ liegen. Wir wollen zeigen, daß ein hinreichend kleiner Teilbogen $C_{P,X'}$ des Bogens $C_{P,X}$ in demselben Winkelraum liegen muß. Wäre dies nicht der Fall, so müßte ein noch so kleines Geradenintervall $0 < r \leqq l$, $\varphi = \varphi'$ (l beliebig klein) innere Punkte des Gebiets $\mathfrak{B}$ enthalten. Wegen der Unbewalltheit der Jordankurve müßte es auf verschiedenen Seiten von P Kurvenpunkte geben, die sich durch einen ganz in $\mathfrak{B}$ verlaufenden Bogen verbinden lassen, welcher für ein noch so kleines l das betreffende Geradenintervall trifft [13]). Dies ist aber unmöglich, weil $C_{P,Y}$ laut Voraussetzung konkav ist und die Strecke $\overline{PY'}$ in hinreichender Nähe von P nur Punkte des Außengebietes enthalten kann. Wir schließen jetzt, daß jede im Winkelraum $0 < \varphi < \varphi'$ oder $\varphi' < \varphi < 180^0$ liegende Gerade durch P eine Stützstrecke durch P enthält [14]).

---

[13]) Für den Fall einer Konkavitätsstelle P machen wir von der Unbewalltheit der Jordankurve in bezug auf das Außengebiet $\mathfrak{B}^*$ entsprechenden Gebrauch.

[14]) Stoßen in P zwei konvexe oder zwei konkave Bögen zusammen, während P entsprechend eine Konkavitäts- oder eine Konvexitätsstelle ist, so folgt diese Behauptung direkt aus dem Parallelitätssatz (Ziff. 7). — Zu jeder Stützstrecke in hinreichender Nähe von P muß es eine parallele Stützstrecke in P geben. Da die beiden in P zusammenstoßenden Bögen an sich konvex sind und mindestens einer von ihnen nicht ganz auf einer Geraden liegen kann, so muß es in einer noch so kleinen Umgebung von P Stützstrecken verschiedener Richtung geben. Darnach gibt es Stützstrecken verschiedener Richtung in P selbst.

Wir beweisen jetzt den folgenden Satz:

Ist A eine isolierte singuläre Konvexitäts- oder Konkavitätsstelle und $J^0_{P,X}$ ein abgeschlossener Kurvenbogen, welcher außer A keine weiteren singulären Stellen enthält, so setzt sich $J^0_{P,X}$ aus endlich vielen (an sich) konvexen Bögen zusammen [15]).

Wir setzen voraus, sämtliche Punkte von $J_{P,X}$ seien Konvexitätsstellen. Es sei g die Verbindungsgerade der beiden Endpunkte P und X des Bogens. $\mathfrak{M}$ sei die Gesamtheit aller Grenzpunkte der Komplementärmenge $(g - g \cdot J^0_{P,X})$ [16]). Da jeder von P verschiedene Punkt des Bogens $J^0_{P,X}$ auf einem konvexen Teilbogen von $J^0_{P,X}$ liegen muß, so folgt sofort, daß die Menge $\mathfrak{M}$ höchstens einen Häufungspunkt haben kann, nämlich P selbst. Angenommen, P sei ein Häufungspunkt von $\mathfrak{M}$.

Wir durchlaufen den Bogen $J^0_{P,X}$ in der Richtung von X nach P und ordnen die Menge $\mathfrak{M}$ in eine Folge, indem wir $X = X_0$ setzen und allgemein mit X_{n+1} den ersten nach X_n getroffenen Punkt von $\mathfrak{M}$ bezeichnen. Den Kurventeilbogen von $J^0_{P,X}$ mit den Endpunkten X_n und X_{n+1} bezeichnen wir mit $C_{X_n, X_{n+1}}$. Für jedes n ist $C_{X_n, X_{n+1}}$ konvex. Liegt nämlich $C_{X_n, X_{n+1}}$ nicht ganz auf g, so bildet die geschlossene Kurve $(\overline{X_n X^0_{n+1}} + C_{X_n, X_{n+1}})$ die Berandung eines konvexen Bereiches $\mathfrak{H}_n$. Um dies einzusehen, genügt es, zu berücksichtigen, daß sämtliche Punkte dieser Kurve Konvexitätsstellen in bezug auf $\mathfrak{H}_n$ sein müssen.

Es sei $C_{X_n, X_{n+1}}$ ein (nicht auf g liegender) konvexer Bogen. Wir wollen uns überzeugen, daß hinreichend kleine Umgebungen $\mathfrak{U}(X_n)$ und $\mathfrak{U}(X_{n+1})$ der Bogenendpunkte X_n und X_{n+1} den Bedingungen $\mathfrak{U}(X_n) \cdot \mathfrak{H}_n = \mathfrak{U}(X_n) \cdot \mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{U}(X_{n+1})\, \mathfrak{H}_n = \mathfrak{U}(X_{n+1}) \cdot \mathfrak{B}$ genügen müssen. Es genügt dies für X_n einzusehen.

Zunächst überzeugen wir uns, daß unsere Behauptung jedenfalls unter der Voraussetzung gilt, daß das in X_n anstoßende Kurvenstück C_{X_{n-1}, X_n} nicht ganz innerhalb $\mathfrak{H}_n$ liegt. Dies ist leicht verständlich, wenn wir berücksichtigen, daß auf $C_{X_n, X_{n+1}}$ mindestens eine Konvexitätsstelle von $\mathfrak{B}$ liegen muß, die nicht gleichzeitig eine Konkavitätsstelle ist. — Jetzt können wir aber schließen, daß C_{X_{n-1}, X_n} nicht in $\mathfrak{H}_n$ liegen kann. Wäre dies nicht der Fall, so müßte nach dem Obigen unsere Behauptung in bezug auf den Kurvenbogen C_{X_{n-1}, X_n} gelten. Es müßte nämlich eine hinreichend kleine Umgebung $\mathfrak{U}'(X_n)$ der Beziehung $\mathfrak{U}'(X_n) \cdot \mathfrak{H}_{n-1} = \mathfrak{U}'(X_n) \cdot \mathfrak{B}$ genügen. Danach müssen sämtliche Punkte auf g in hinreichender Nähe von X_n innere Punkte von $\mathfrak{B}$ sein. X_n wäre im Gegensatz zur Voraussetzung eine Konkavitätsstelle des Gebietes $\mathfrak{B}$. Eine ganz entsprechende Schlußweise gilt natürlich auch für X_{n+1}.

Aus der bewiesenen Behauptung können wir zunächst folgern, daß zwei in einem Punkt $X_n (n \geqq 1)$ zusammenstoßende Komponenten C_{X_{n-1}, X_n} und $C_{X_n, X_{n+1}}$, die nicht ganz auf der Geraden g liegen, in verschiedenen Halbebenen in bezug auf die Gerade g enthalten sind, da sonst X_n eine Konkavitätsstelle wäre.

Weiterhin können wir schließen, daß ein Punkt X_n, in welchem zwei (beliebige) Kurvenstücke C_{X_{n-1}, X_n} und $C_{X_n, X_{n+1}}$ zusammenstoßen, niemals zwischen den Endpunkten X_{n-1} und X_{n+1} auf g liegen kann. Im entgegengesetzten Falle könnte X_n keine Konkavitätsstelle sein.

---

[15]) Dieser Satz kann auch allgemeiner ausgesprochen werden, in dem wir voraussetzen, daß sämtliche Punkte von $J_{P,X}$ — mit Ausnahme von P — entweder nur Konvexitäts- oder nur Konkavitätsstellen sind, während über P nur die Existenz einer Stützstrecke vorausgesetzt wird. Wie in Ziff. 7 gezeigt wurde, müssen sämtliche Punkte von $J_{P,X}$, P ausgenommen, gewöhnliche Punkte sein.

[16]) Wie leicht ersichtlich ist $\mathfrak{M} = (g - g \cdot J^0_{P,X}) \cdot J^0_{P,X}$.

Zuletzt folgern wir noch, daß kein Kurvenstück $C_{x_n, x_{n+1}}$ $(n > 0)$ ganz auf g liegen kann, da sonst einer der beiden Endpunkte X_n oder X_{n+1} eine Konkavitätsstelle sein müßte.

Wegen der P betreffenden Voraussetzung existiert ein erster Punkt X_{n_0}, welcher zwischen den beiden Punkten X_{n_0-1} und X_{n_0-2} auf g liegt. Durch Induktionsschluß folgern wir daß X_n zwischen X_{n-1} und X_{n-2} für jedes $n > n_0$ auf der Geraden g liegen muß. Angenommen, unsere Behauptung gilt für $n-1$. Der Teilbogen C_{X_{n-1}, X_n} liegt in derselben Halbebene in bezug auf g wie der Bogen $C_{X_{n-3}, X_{n-2}}$. Es muß darnach X_n zwischen X_{n-2} und X_{n-3} liegen. Da nun in X_{n-1} die beiden Bögen C_{X_{n-1}, X_n} und $C_{X_{n-2}, X_{n-1}}$ zusammenstoßen, so kann X_n nicht zwischen X_{n-3} und X_{n-1} liegen.

Das letzte Resultat besagt, daß die Kurve $J_{P,X}$ in bezug auf P spiralartig verläuft und aus abzählbar vielen konvexen Bögen bestehen muß. Ein jeder Halbstrahl mit dem Endpunkt in P wird in beliebiger Nähe von P von der Kurve getroffen. Dies widerspricht unserer Annahme der Existenz einer Stützstrecke in P. *Die Kurve $J_{P,X}$ hat also in der Umgebung von P den Verlauf einer aus endlich vielen konvexen Bögen bestehenden Spirale* [17]).

Berücksichtigen wir noch besonders die Isoliertheit der singulären Stelle P, so ergibt sich das entsprechende Resultat auch für die andere Seite der Kurve in bezug auf P, und wir können schließen, daß *es in P mindestens zwei verschiedene Stützstrecken geben muß.*

Aus den Betrachtungen über die isolierten singulären Konvexitäts- und Konkavitätsstellen gewinnen wir auch Aufschluß über die Gestalt der Kurve in der Umgebung isolierter singulärer Stellen ohne Stützstrecken. Einen solchen P nennen wir einen *Wendepunkt*, wenn ein konvexer und ein konkaver Bogen in ihm zusammenstoßen. Im anderen Fall nennen wir ihn einen *Spiralpunkt.* Ist g eine beliebige Gerade durch P, so können wir auf der Kurve einen solchen Punkt X wählen, daß ein Kurvenbogen durch g in abzählbar viele (nicht ganz geradlinige) konvexe Bögen mit dem Häufungspunkt in P zerlegt wird. Die Kurve $J_{P,X}$ verläuft in bezug auf P spiralartig. In einem Polarkoordinatensystem (r, φ) mit dem Pol in P und einer mit g zusammenfallenden Achse können wir die Kurve $J_{P,X}$ als eine stetige Funktion $r = f(\varphi)$ so darstellen, daß jedem Sektor der Kurve für $n\pi \leqq \varphi \leqq (n+1)\pi$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ ein an sich konvexer Teilbogen und dem Punkt $r = 0$, $\varphi = +\infty$ oder $-\infty$ der Punkt P entspricht. Besonders sei hervorgehoben, daß auch ein zu $J_{P,X}$ fremder Bogen der Jordankurve J mit dem Endpunkt in P in bezug auf diesen letzteren spiralartig verlaufen muß. Besteht $J_{P,X}$ aus Konvexitätsstellen, so muß dieser zweite Bogen in der Umgebung von P aus Konkavitätsstellen bestehen und umgekehrt.

[17]) Diese Behauptung kann auch aus den entsprechenden (mit anderen Hilfsmitteln gewonnenen) Resultaten über differentierbare Kurven mit endlich vielen Singularitäten (im Sinne der Differentierbarkeit) gefolgert werden. Im wesentlichen gehen diese bereits auf A. F. Möbius zurück (Die Gestalt sphärischer Kurven, Leipziger Berichte **2** (1848), S. 179—182, — Gesammelte Werke II, S. 183—187). In voller Strenge wurde dieser Satz von A. Kneser (Gestalten ebener Kurven, Math. Ann. **41**, insb. S. 358—359) und insbesondere von J. Hjelmslev (Contribution a la géométrie infinitésimale de la courbe réelle, Kgl. Dansk. Videnskab. Forhandl. 1911, N. 5) bewiesen. Nach Hjelmslev kann die Voraussetzung der Differentierbarkeit durch eine allgemeinere, der Existenz der Halbtangenten, ersetzt werden. Eine unserer ähnliche Betrachtung findet sich auch in der Abhandlung des Herrn W. Fenchel über den Verlauf sphärischer Kurven mit stetiger geodätischer Krümmung auf der Halbkugel (Krümmung und Windung geschlossener Raumkurven, Math. Ann. **101** (1929), S. 245—249).

Eingegangen 16. Februar 1930.

Über eine Familie analytischer Regelflächen.

Von *O. Mühlendyck* in Berlin.

Die von Zylindern verschiedenen analytischen Regelflächen, die euklidische Erzeugende besitzen, lassen sich in zwei Familien einteilen:

1. Regelflächen, bei denen sich ein begleitendes rechtwinkliges Dreikant einführen läßt, dessen Kanten die Erzeugende, die Zentraltangente und die Zentralnormale sind.

2. *Windschiefe Regelflächen mit isotroper Richtebene.* Während man für die Regelflächen der ersten Familie natürliche Gleichungen aufgestellt hat, ist dies für die Regelflächen der zweiten Familie merkwürdigerweise noch nicht geschehen. Das begleitende rechtwinklige Dreikant der Regelflächen der ersten Familie (s. o.) existiert nicht für die Regelflächen der zweiten Familie. Auch werden die Invarianten unbrauchbar, die man für die Regelflächen der ersten Familie aufzustellen pflegt. Man muß lauter neue Invarianten bilden. Ich werde im folgenden mit Hilfe geeigneter Invarianten natürliche Gleichungen für die Regelflächen der zweiten Familie aufstellen.

Es liege eine Regelfläche der zweiten Familie vor. Wir orientieren die Erzeugende der Regelfläche und stellen sie durch ihre Richtungskosinus x_1, x_2, x_3 und Momente ξ_1, ξ_2, ξ_3 dar. Die Koordinaten x_i, ξ_i erfüllen die Bedingungen

$$\Sigma x_i^2 = 1, \quad \Sigma x_i \xi_i = 0. \tag{1}$$

Wir fassen die Koordinaten zu den Vektoren x, ξ zusammen. Das innere Produkt zweier Vektoren a, b werde mit (ab) bezeichnet. Dann lassen sich die Bedingungen (1) so schreiben:

$$(xx) = 1, \quad (x\xi) = 0. \tag{2}$$

Unsere Regelfläche sei durch die Gleichungen

$$x = x(t), \quad \xi = \xi(t) \tag{3}$$

gegeben. Zwei Nachbarerzeugende der Regelfläche x, ξ und $x + x'dt, \xi + \xi'dt$ bilden miteinander das Moment

$$-(x'\xi')dt^2.$$

Dies Moment kann nicht identisch verschwinden, da die Regelfläche windschief sein soll. Integrieren wir die Quadratwurzel aus dem Moment, so erhalten wir den *natürlichen Parameter*

$$\tau = \int \sqrt{-(x'\xi')}\, dt, \tag{4}$$

der bis auf das Vorzeichen und eine additive Konstante bestimmt ist.

Für das Folgende legen wir den natürlichen Parameter τ zugrunde, nehmen also die Gleichungen unsrer Regelfläche in der Form an:

$$x = x(\tau), \quad \xi = \xi(\tau). \tag{5}$$

Striche deuten von jetzt an Ableitungen nach dem natürlichen Parameter τ an. Da die Erzeugenden der Regelfläche einer Minimalebene parallel sein sollen, muß die Bedingung

$$(6) \qquad (x'\,x') = 0$$

identisch erfüllt sein.

Es besteht die Identität

$$(7) \qquad (xx'\,\omega)^2 = -\,(x'\,\omega)^2,$$

wo ω ein willkürlicher Hilfsvektor ist und $(xx'\,\omega)$ die aus den Vektoren x, x', ω gebildete Determinante bedeutet. Infolge dieser Identität können wir die Orientierung der Erzeugenden x, ξ der Regelfläche *rational* erklären, indem wir festsetzen, daß

$$(8) \qquad (xx'\,\omega) = -\,i(x'\,\omega)$$

sein soll.

Unsre Regelfläche hat die bemerkenswerte Eigenschaft, daß *allgemein gelegene Nachbarerzeugende keine eigentliche Gerade als gemeinsame Normale* besitzen. Daher läßt sich das begleitende rechtwinklige Dreikant der Regelflächen der ersten Familie (s. o.) für unsre Regelfläche nicht einführen. Durch die Erzeugende x, ξ unsrer Regelfläche gehen die Minimalebenen E_1 und E_2. E_1 sei die Minimalebene, zu der die Erzeugenden der Regelfläche parallel sind. Die Minimalebene E_2 wird von der Erzeugenden $x + x'd\tau$, $\xi + \xi'd\tau$ geschnitten. S sei die Grenzlage des Schnittpunkts. Offenbar wird die Regelfläche im Punkt S von der Minimalebene E_2 berührt. Wir legen durch den Punkt S die Ebene E senkrecht zur Erzeugenden x, ξ. Das Dreikant E, E_1, E_2 besitzt eine euklidische und zwei Minimalkanten. Wir ordnen jeder Kante einen auf ihr gelegenen und nur auf ihr verschiebbaren Vektor zu und gewinnen auf diese Weise drei Stäbe. Der euklidischen Kante ordnen wir den Einheitsvektor x zu, der Minimalkante, in der sich die Ebenen E und E_1 schneiden, den Minimalvektor $y = x'$, der anderen Minimalkante den Minimalvektor z und zwar derart, daß die Determinante $(xyz) = 1$ wird. Wir erhalten so den Einheitsstab x, ξ und die Minimalstäbe y, η und z, ζ. Diese drei Stäbe sind mit der Regelfläche invariant verbunden und mögen als das *begleitende Dreibein* der Regelfläche bezeichnet werden [1]). Man beachte, daß die Kante z, ζ sowohl die Erzeugende x, ξ wie die Nachbarerzeugende $x + x'd\tau$, $\xi + \xi'd\tau$ schneiden muß:

$$(9) \qquad \begin{cases} (z\xi) + (x\zeta) = 0, \\ (z\xi') + (x'\zeta) = 0. \end{cases}$$

Bezeichnet man das äußere Produkt zweier Vektoren a, b mit $[ab]$, so erhält man für die Stäbe des begleitenden Dreibeins die Formeln:

$$(10) \qquad \begin{cases} x = x(\tau),\ \xi = \xi(\tau), \\ y = x',\ \eta = -\,iz + \xi', \\ z = \dfrac{1}{2}\{[x'\,\xi] - [x\xi'] - i\xi'\},\quad \zeta = -\,(z\xi)x + i(z\xi')\,z. \end{cases}$$

Für das Dreibein (10) sind die Bedingungen erfüllt:

$$(11) \qquad \begin{cases} (xx) = 1,\ (yy) = (zz) = 0,\ (yz) = i,\ (zx) = (xy) = 0,\ \ (xyz) = 1, \\ (x\xi) = (y\eta) = (z\zeta) = 0, \\ (y\zeta) + (z\eta) = (z\xi) + (x\zeta) = (x\eta) + (y\xi) = 0. \end{cases}$$

Die zu den verschiedenen Erzeugenden der Regelfläche gehörigen begleitenden Dreibeine

---

[1]) E. Study hat bei der Untersuchung der Minimalkurven ein besonderes begleitendes System von drei Vektoren eingeführt. Zu diesem System stehen die von uns benutzten Vektoren x, y, z in einfacher Beziehung. Die betreffende Arbeit Studys findet sich in den Transact. Amer. Math. Soc. 1910.

(10) sind zueinander kongruent, sie sind durch die Bedingungen (11) gekennzeichnet hinsichtlich der Bewegungsgruppe.

Der Vektor x'' hat die Richtung des Minimalvektors x', ist also ebenfalls ein Minimalvektor. Wir bilden das Verhältnis der beiden Vektoren und erhalten die *Invariante*

$$A = \frac{(x''\omega)}{(x'\omega)} = \frac{(x''\xi')}{(x'\xi')} = -(x''\xi'), \tag{12}$$

wo ω ein willkürlicher Hilfsvektor ist.

Da die Kanten y, η und $y + y'd\tau$, $\eta + \eta'd\tau$ zueinander parallel sind, können wir durch sie eine Ebene legen. Diese Ebene hat Normalen, die zu der Minimalebene E_1 (s. o.) parallel und durch den Einheitsvektor $\eta' - A\eta$ gegeben und orientiert sind. Die Orientierung ist derart, daß sie der Orientierung der Erzeugenden der Regelfläche, die ja auch zu der Minimalebene E_1 parallel sind, entspricht, nämlich so, daß die der Festsetzung (8) entsprechende Bedingung

$$(\eta' - A\eta, x', \omega) = -i(x'\omega) \tag{13}$$

erfüllt ist. Bilden wir jetzt das innere Produkt der Vektoren z und $\eta' - A\eta$, so erhalten wir die *Invariante*

$$\begin{cases} B = (z, \eta' - A\eta) = (z, \xi'' + (x''\xi')\xi') \\ \quad = \frac{1}{2}\{(x'\xi\xi'') - (x\xi'\xi'') - i(\xi'\xi'')\} + \frac{(x''\xi')}{2}\{(x'\xi\xi') - i(\xi'\xi')\}. \end{cases} \tag{14}$$

Indem wir über den positiven Sinn der Zählung des natürlichen Parameters τ eine Entscheidung treffen, orientieren wir, wie wir sagen wollen, unsre Regelfläche. A und B sind einwertige Invarianten der orientierten Regelfläche. Mit Hilfe dieser Invarianten lassen sich die Ableitungen der Stäbe des begleitenden Dreibeins nach dem natürlichen Parameter τ berechnen. Es ergeben sich die *Ableitungsformeln*:

$$\begin{cases} x' = y, & \xi' = iz + \eta, \\ y' = Ay, & \eta' = x - iBy + A\eta, \\ z' = -ix - Az, & \zeta' = iBz - i\xi - A\zeta. \end{cases} \tag{15}$$

Auf Grund dieser Formeln läßt sich folgendes schließen:

Die Gleichungen $A = A(\tau)$, $B = B(\tau)$ sind die natürlichen Gleichungen unsrer orientierten Regelfläche. Nimmt man die Invarianten A und B als analytische Funktionen des natürlichen Parameters τ mit gemeinsamem Existenzbereich an, so gibt es zugehörige orientierte windschiefe Regelflächen mit isotroper Richtebene, und zwar sind alle diese orientierten Regelflächen zueinander kongruent.

Eingegangen 15. Juni 1930.